物理学 II

第 4 回　中間テスト

１．　水平面上を質量mの物体が速度v_0で滑っている。その後、距離l滑ったとき、速度が$v_1\ (< v_0)$となった。摩擦が物体にした仕事を求め、符号も含めて表せ。ただし、物体には空気の抵抗はないものとする。

解答例

　力学的エネルギー（位置エネルギー＋運動エネルギー）は、運動の前後で摩擦がした仕事分だけ減少する。したがって、摩擦が物体にした仕事は、

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2 = \frac{1}{2}m({v_0}^2 - {v_1}^2)$$

　だけ減少。

　したがって、$-\frac{1}{2}m({v_0}^2 - {v_1}^2)$

　実際には摩擦熱（物体と床の原子振動、つまり原子の運動エネルギー）が発生し、力学的エネルギーは保存されているが、見掛け上は物体の運動エネルギーが減少し、力学的エネルギーが保存されないように見える。

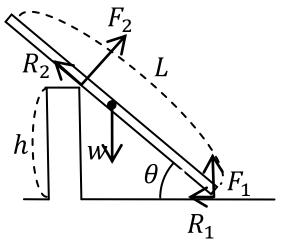
物理学 II

第４回　中間テスト

２．鉛直な高さhの塀に、長さL、重さwの一様な丸太が立てかけてあり、丸太と地面のなす角はθである。

（１）丸太に地面と塀が及ぼす抗力をそれぞれF_1、F_2、丸太と地面、丸太と塀の間の摩擦力をそれぞれR_1として、水平方向と鉛直方向のつり合いの式を書け。

（２）丸太の下端まわりのモーメントのつり合いの式を書け。



解答例

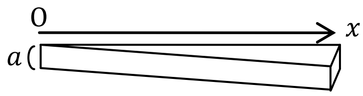
（１）水平方向：$R_1 + R_2\cos\theta - F_2\sin\theta = 0$

鉛直方向：$F_1 + R_2\sin\theta + F_2\cos\theta - w = 0$

（２）$F_2 \times \frac{h}{\sin\theta} - w \times \frac{L}{2}\cos\theta = 0$

物理学 II
第４回　中間テスト

３．長さl、質量M、厚さaのまっすぐな細い棒がある。一様な材料で作られているが、断面積は一端からの距離に比例し、$\frac{abx}{l}$と書ける。



（１）この棒の体積を$\frac{abx}{l}$を積分して求めよ。

（２）この棒の質量中心の位置はどこか。

（３）質量中心を通る、棒に垂直な軸のまわりの慣性モーメントI_cはいくらか。

解答例

（１）$\int_0^l \frac{abx}{l}\,\mathrm{d}x = \frac{ab}{l}\int_0^l x\,\mathrm{d}x = \frac{abl}{2}$

（２）この棒の密度は $\frac{M}{\frac{abl}{2}} = \frac{2M}{abl}$ だから、重心の位置をx_Gとすると、

$$x_\mathrm{G} = \frac{1}{M}\int_0^l x \times \frac{2M}{abl}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{M}\int_0^l x \times \frac{2M}{abl} \times \frac{abx}{l}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{l^2}\int_0^l x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}l$$

（３）原点を通り、棒に垂直な軸のまわりの慣性モーメントをI_Oとすると、

$$I_\mathrm{O} = \int_0^l x^2 \times \frac{2M}{abl}\,\mathrm{d}V = \int_0^l x^2 \times \frac{2M}{abl} \times \frac{abx}{l}\,\mathrm{d}x = \frac{2M}{l^2}\int_0^l x^3\,\mathrm{d}x = \frac{Ml^2}{2}$$

ここで、$I_\mathrm{O} = I_\mathrm{c} + M \times \left(\frac{2}{3}l\right)^2$ だから、

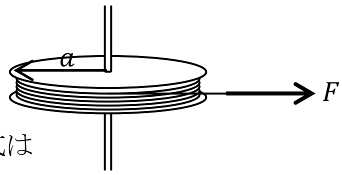
$$I_\mathrm{c} = \frac{Ml^2}{2} - \frac{4}{9}Ml^2 = \frac{Ml^2}{18}$$

物理学 II
第４回　中間テスト

４．一様な円柱（質量M、半径a）の中心軸を鉛直な固定軸とし、その周囲に滑らないひもを巻き付け、ひもの端を一定の大きさFの力で水平に引っ張った。

（１）時間tの後には円柱はどれだけの角速度になるか。ただし、円柱の中心軸まわりの回転の慣性モーメントは$\frac{Ma^2}{2}$である。

（２）ひもの長さをlとしたとき、ひもが全部ほどけるまでにはどれだけの時間がかかるか。



解答例

（１）時間$t = 0$から回転した角度を時間θとすると、回転の運動方程式は

$$\frac{Ma^2}{2}\ddot{\theta} = aF$$

したがって、$\ddot{\theta} = \frac{2F}{Ma}$

両辺を時間の関数として積分すると、$\dot{\theta} = \frac{2F}{Ma}t + C$ (C: 積分定数)

$t = 0$ のとき、$\dot{\theta} = 0$ だから、$C = 0$

よって時間tのときの角速度 $\dot{\theta} = \frac{2F}{Ma}t$

（２）前問（１）の結果を両辺積分すると、$t = 0$ のとき $\theta = 0$ だから、

$$\theta = \frac{F}{Ma}t^2$$

$l = a\theta$だから、ひもが全てほどけるまでに回転する角度は $\theta = \frac{l}{a}$

したがって、$\frac{F}{Ma}t^2 = \frac{l}{a}$ より、

$$t^2 = \frac{Ml}{F}$$

$$t = \sqrt{\frac{Ml}{F}} \quad \left(\because \ t, M, l, F \text{は正}\right)$$