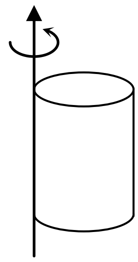
物理学 II
第３回　中間テスト（レポート）

１．（１）半径a、高さh、質量Mの円柱の中心軸まわりの慣性モーメントを求めよ。
（２） 前問（１）の結果を用い、一様なシリンダーの、直径を軸とする慣性モーメントを求めよ。ただしシリンダーは、半径a、高さhの円柱から、半径b $(b < a)$、高さhの円柱をくり抜いた形状をしており、質量がMであるとする。
（３） 前問（２）で半径bを限りなくaに近づけ、半径a、高さhの薄いシリンダーとしたときの、直径を軸とする慣性モーメントがMa^2であることを示せ。
（４） 前問（３）の薄いシリンダーを、下図のように、シリンダー外壁に接し、直径に平行な軸で回転させるときの慣性モーメントを求めよ。



解答例

（１）円柱を中心軸からrと$r + \mathrm{d}r$の距離に挟まれた微小部分に分割すると、
慣性モーメントは、$I_c = \int r^2 \rho \, \mathrm{d}V$と書ける。
このとき、$\mathrm{d}V = 2\pi r \times h \times \mathrm{d}r$　，　$\rho = \frac{M}{\pi a^2 h}$　だから、

$$I_c = \int_0^a r^2 \frac{M}{\pi a^2 h} \times 2\pi r \times h \, \mathrm{d}r = \frac{2M}{a^2} \int_0^a r^3 \, \mathrm{d}r = \frac{Ma^2}{2}$$

（２）半径a、高さhの円柱の質量をM_aとすると慣性モーメントは$\frac{M_a a^2}{2}$、半径a、高さhの円柱の質量をM_bとすると慣性モーメントは$\frac{M_b b^2}{2}$だから、シリンダーの慣性モーメントI_cは、$I_c = \frac{M_a a^2}{2} - \frac{M_b b^2}{2}$と書ける。
ここでシリンダーの密度をρとすると、シリンダーの体積が$\pi h(a^2 - b^2)$だから、

$\rho = \frac{M}{\pi h(a^2 - b^2)}$　，　$M_a = \rho \pi a^2 h$　，　$M_b = \rho \pi b^2 h$

したがって、$I_c = \frac{M}{\pi(a^2 - b^2)h} \times \pi h \times \left(\frac{a^2 \times a^2}{2} - \frac{b^2 \times b^2}{2}\right) = \frac{M(a^4 - b^4)}{2(a^2 - b^2)}$

（３）$h = a - b$とすると、半径bを限りなくaに近づけたときのシリンダーの慣性モーメントI_cは、

$$I_c = \lim_{h \to 0} \frac{M(a^4 - b^4)}{2(a^2 - b^2)} = \frac{M}{2} \lim_{h \to 0} \frac{\frac{a^4 - (a-h)^4}{h}}{\frac{a^2 - (a-h)^2}{h}} = \frac{M}{2} \frac{\lim_{h \to 0} \frac{a^4 - (a-h)^4}{h}}{\lim_{h \to 0} \frac{a^2 - (a-h)^2}{h}} = \frac{M}{2} \frac{(a^4)'}{(a^2)'} = \frac{M}{2} \frac{4a^3}{2a} = Ma^2$$

（４）シリンダー外壁に接し、直径に平行な軸で回転させるときの慣性モーメントをIとすると、

$$I = I_c + Ma^2 = 2Ma^2$$

物理学 II
第３回　中間テスト（レポート）

２．空き缶と、水が入った缶と、氷が入った缶がある。缶は３つとも等価で、半径はa、質量はMである。水と氷はともに質量mだけ、隙間なく入っている（凍結による膨張は無視）。この３つの缶を水平と角αをなす斜面上に、軸が水平で最大傾斜線と垂直になるように置いたら、缶は３つとも滑らずに転がり落ちた。斜面と缶の間に働く摩擦係数をμとし、斜面の最大傾斜線に平行で下向きにx軸をとして、以下の問に答えよ。ただし、缶の厚みは無視でき、水は缶の中で回転しないものとする。

（１）　３つの缶のx軸方向の重心の運動方程式をそれぞれ書け。

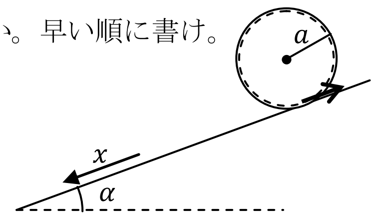
（２）　空き缶の回転軸まわりの慣性モーメントをMa^2としたとき、水は缶の中で回転しないため、水が入った缶の慣性モーメントもMa^2となる。氷が入った缶の慣性モーメントを書け。

（３）転がり出してからの缶の回転数をθとしたとき、３つの缶の回転の運動方程式をそれぞれ書け。

（４）　缶の種類に関わらず、缶の加速度$\ddot{x}$と角加速度$\ddot{\theta}$間で成り立つ関係式を書け。

（５）　缶の加速度$\ddot{x}$を３つの場合それぞれに対して求めよ。

（６）　３つの缶を同時に放したとき、どの缶が最も速く転がり落ちるか。早い順に書け。



解答例

（１）空き缶：$M\ddot{x} = Mg\sin\alpha - \mu Mg\cos\alpha$

水が入った缶：$(M+m)\ddot{x} = (M+m)g\sin\alpha - \mu(M+m)g\cos\alpha$

氷が入った缶：$(M+m)\ddot{x} = (M+m)g\sin\alpha - \mu(M+m)g\cos\alpha$

（２）Ma^2に氷の慣性モーメントを加えればよい。したがって、

$$Ma^2 + \frac{ma^2}{2} = \frac{a^2}{2}(2M+m)$$

（３）空き缶：$Ma^2\ddot{\theta} = \mu Mag\cos\alpha$

水が入った缶：$Ma^2\ddot{\theta} = \mu(M+m)ag\cos\alpha$

氷が入った缶：$\frac{1}{2}(2M+m)a^2\ddot{\theta} = \mu(M+m)ag\cos\alpha$

（４）$x = a\theta$だから、$\ddot{x} = a\ddot{\theta}$

（５）空き缶：$\ddot{x} = a\ddot{\theta}$より、$Ma^2\ddot{\theta} = \mu Mag\cos\alpha$は$\ddot{x} = \mu g\cos\alpha$と変形できる。

これを$M\ddot{x} = Mg\sin\alpha - \mu Mg\cos\alpha$に代入すると、$M\ddot{x} = Mg\sin\alpha - M\ddot{x}$となるから、

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}g\sin\alpha$$

水が入った缶：同様に、$Ma^2\ddot{\theta} = \mu(M+m)ag\cos\alpha$は$M\ddot{x} = \mu(M+m)g\cos\alpha$と変形できる。

$(M+m)\ddot{x} = (M+m)g\sin\alpha - \mu(M+m)g\cos\alpha$に代入すると、$(M+m)\ddot{x} = (M+m)g\sin\alpha - M\ddot{x}$となるから、

$$\ddot{x} = \frac{M+m}{2M+m}g\sin\alpha$$

物理学 II

第３回　中間テスト（レポート）

水が入った缶：同様に、$\frac{1}{2}(2M+m)a^2\ddot{\theta}=\mu(M+m)ag\cos\alpha$は$\frac{1}{2}(2M+m)\ddot{x}=\mu(M+m)g\cos\alpha$と変形できる。$(M+m)\ddot{x}=(M+m)g\sin\alpha-\mu(M+m)g\cos\alpha$に代入すると、

$(M+m)\ddot{x}=(M+m)g\sin\alpha-\frac{1}{2}(2M+m)\ddot{x}$となるから、

$$\ddot{x}=\frac{2(M+m)}{4M+3m}g\sin\alpha$$

（６）前問（５）で求めた加速度の大小関係を求めればよい。

空き缶と水が入った缶の比較：$\frac{1}{2}g\sin\alpha-\frac{M+m}{2M+m}g\sin\alpha=-\frac{m}{2(2M+m)}g\sin\alpha<0$

空き缶と氷が入った缶の比較：$\frac{1}{2}g\sin\alpha-\frac{2(M+m)}{4M+3m}g\sin\alpha=-\frac{m}{2(4M+3m)}g\sin\alpha<0$

水が入った缶と氷が入った缶の比較：$\frac{M+m}{2M+m}g\sin\alpha-\frac{2(M+m)}{4M+3m}g\sin\alpha=\frac{Mm+m^2}{(2M+m)(4M+3m)}g\sin\alpha>0$

したがって、水が入った缶>氷が入った缶>空き缶 の順で速く転がり落ちる。