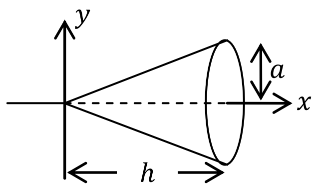
物理学 II
第２回　中間テスト

１．（１）図のような円錐の重心は $x = 3h/4$ の位置にあることを、積分を用いて示せ。

（２）　高さ$3h$の直円錐の上部を軸に垂直に切り落とし、高さhの円錐台を作った。この円錐台の質量中心の底面からの高さを求めよ。



<u>解答例</u>

（１）重心の位置をx_{G}とすると、$x_{\mathrm{G}} = \frac{1}{M}\int_0^h x\rho\,\mathrm{d}V$と書ける。ただし、$M$は円錐の質量。

ここで、x軸に垂直な面で円錐を切ったときの断面積は$\pi a^2\left(\frac{x}{h}\right)^2$となるから、$\mathrm{d}V = \frac{\pi a^2}{h^2}x^2\mathrm{d}x$

また、$\rho = \frac{M}{V}$　（Vは円錐の体積）であり、$V = \int_0^h \pi a^2\left(\frac{x}{h}\right)^2\mathrm{d}x = \frac{\pi a^2}{h^2}\int_0^h x^2\mathrm{d}x = \frac{\pi a^2 h}{3}$ だから、

$$x_{\mathrm{G}} = \frac{1}{M}\int_0^h x\frac{3M}{\pi a^2 h}\frac{\pi a^2}{h^2}x^2\mathrm{d}x = \frac{3}{h^3}\int_0^h x^3\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}h$$

（２）切り取る前の直円錐の頂点を原点とし、底面への垂線方向をx軸に取ると、（１）の結果より、高さ$3h$の直円錐の重心の位置は$3h\times\frac{3}{4} = \frac{9}{4}h$ であることが分かる。

この円錐の質量をM_0とする。

同様に、切り取られた上部の円錐部分の重心位置は $\frac{3}{2}h$、質量は$\left(\frac{2h}{3h}\right)^3 M_0$と求められる。

切り取った後の円錐台の重心の位置をx_{G}とすると、

$$\frac{9}{4}h = \frac{\left(\frac{2h}{3h}\right)^3 M_0\times\frac{3}{2}h + \left\{M_0 - \left(\frac{2h}{3h}\right)^3 M_0\right\}\times x_{\mathrm{G}}}{M_0}$$

$$\frac{9}{4}h = \frac{8}{27}\times\frac{3}{2}h + \left\{1 - \frac{8}{27}\right\}\times x_{\mathrm{G}}$$

$$x_{\mathrm{G}} = \frac{65}{36}h\times\frac{27}{19}$$

$$x_{\mathrm{G}} = \frac{195}{76}h$$

したがって、底面からの高さは、$3h - \frac{195}{76}h = \frac{33}{76}h$

物理学 II

第２回　中間テスト

２．　輸送機が滑走路に待機している。荷物を積んでいないときには、前輪に1トン、２つの後輪にそれぞれ4.5トンの重さがかかっていたが、荷物を積んだら前輪に6.4トン、左右の後輪にそれぞれ4.8トン、7.8トンの重さがかかった。後輪間の距離は6 m、前輪から後輪までの垂直距離は10 mである。どれだけの荷物をどこに積んだのか。

解答例

前輪、左の後輪、右の後輪の座標がそれぞれ$(0,10)$、$(-3,0)$、$(3,0)$となるようにxy座標をとる。

荷物を積んだ後にそれぞれの車輪に掛かる重さは差し引き、5.4トン、0.3トン、3.3トンであるから、重さの合計は9.0トン

荷物を積んだ位置を$(x_{\mathrm{G}}, y_{\mathrm{G}})$とすると、

$$x_{\mathrm{G}} = \frac{5.4 \times 0 + 0.3 \times (-3) + 3.3 \times 3}{9.0} = 1$$

$$y_{\mathrm{G}} = \frac{5.4 \times 10 + 0.3 \times 0 + 3.3 \times 0}{9.0} = 6$$

したがって、9.0トンの荷物が、前輪から4 m後方、中心軸から右へ1 mずれた位置に積まれている。

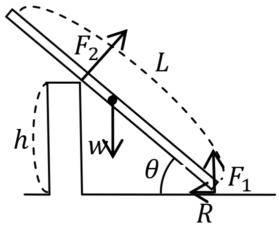
物理学 II
第２回　中間テスト

３．鉛直でなめらかな高さhの塀に、長さL、重さwの一様な丸太が立てかけてあり、丸太と地面のなす角はθである。

（１）丸太に地面と塀が及ぼす抗力をそれぞれF_1、F_2、丸太と地面の間の摩擦力をRとして、水平方向と鉛直方向のつり合いの式を書け。

（２）丸太の下端まわりのモーメントのつり合いの式を書け。

（３）F_1、F_2、Rを求めよ。



解答例

（１）F_2の水平方向成分と鉛直方向成分はそれぞれ$F_2\sin\theta$、$F_2\cos\theta$であるから、

水平方向のつり合い：$F_2\sin\theta = R$　　　　… ①

鉛直方向のつり合い：$F_1 + F_2\cos\theta = w$　　　　… ②

（２）丸太の下端まわりのモーメントを考える場合、F_1とRは回転運動に寄与しないため、考慮しなくてよい。

時計回りの方向を正とすると、

$$F_2 \times \frac{h}{\sin\theta} - w \times \frac{L}{2}\cos\theta \quad \cdots \text{③}$$

（３）式③より、$F_2 = \frac{wL}{2h}\sin\theta\cos\theta$

式②に代入すると、$F_1 = w - \frac{wL}{2h}\sin\theta\cos^2\theta\ \left(= w\left(1 - \frac{L}{2h}\sin\theta\cos^2\theta\right)\right)$

式①より、$R = \frac{wL}{2h}\sin^2\theta\cos\theta$

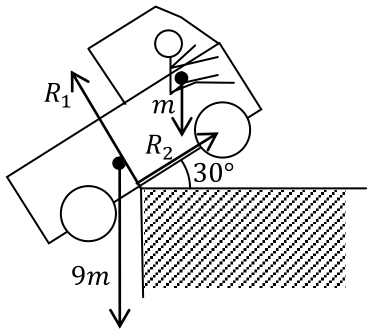
物理学 II
第２回　中間テスト

４．図のように、垂直な崖っぷちで車が$30°$傾いて停まっている。運転手と車体の質量はそれぞれmと$9m$である。また、車と崖の接触点を原点とし、水平右方向にx軸、鉛直上方向にy軸を取ったときの重心の位置は、それぞれ$(x_\mathrm{c}, y_\mathrm{c})$と$(x_\mathrm{m}, y_\mathrm{m})$（ただし、$x_\mathrm{c}$は負,$y_\mathrm{c}, x_\mathrm{m}, y_\mathrm{m}$は正）であるとする。原点における垂直抗力を$R_1$、摩擦力を$R_2$、重力加速度を$g$として以下の問に答えよ。ただし、奥行きは無視できるものとし、乗車人数は運転手一人だけとする。

（１）x軸方向とy軸方向のつり合いの式を書け。

（２）原点まわりの力のモーメントのつり合いから、x_mをx_cで表せ。

（３）原点における静止摩擦係数をμとしたとき、μはいくら以上でなければならないか示せ。



解答例

（１）R_1の水平方向成分と鉛直方向成分はそれぞれ$R_1 \sin 30°$、$R_1 \cos 30°$、R_2の水平方向成分と鉛直方向成分はそれぞれ$R_2 \cos 30°$、$R_2 \sin 30°$であるから、

水平方向のつり合い：$\frac{1}{2}R_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}R_2$　　… ①

鉛直方向のつり合い：$\frac{\sqrt{3}}{2}R_1 + \frac{1}{2}R_2 = mg + 9mg$　　… ②

（２）原点のまわりのモーメントを考える場合、R_1とR_2は回転運動に寄与しないため、考慮しなくてよい。

$$9m \times x_\mathrm{c} + m \times x_\mathrm{m} = 0 \quad \cdots \text{③}$$

したがって、$x_\mathrm{m} = -9x_\mathrm{c}$

（３）μR_1が最大摩擦力であるから、$\mu R_1 \geq R_2$の範囲で滑り出さない。

式①より$R_1 = \sqrt{3}R_2$だから、$\mu \geq \frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

したがって、μ は $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 以上でなければならない。

物理学 II
第 2 回　中間テスト

５．xy平面上の点$(0, 4a)$，点$(3a, 0)$，点$(-3a, 0)$に頂点を持つ二等辺三角形がある。この三角形の質量中心のy座標を求めよ。ただし三角形は密度ρで均質であり、厚さをbとして計算せよ。

解答例

質量中心のy座標を求めるために、y軸に直交する厚さ$\mathrm{d}y$の微小部分に分解して考える。

この微小部分は$y = 0$から$4a$まで変化するとき、yに比例して$6a$から0まで幅が変化する。したがって、体積$\mathrm{d}V$は、$\mathrm{d}V = 6a \times \frac{4a-y}{4a} \times b\,\mathrm{d}y$と書ける。

また、この三角形の質量をMとすると、$\rho = \frac{M}{12a^2b}$であるから、重心の位置をy_Gとすると、

$$
\begin{aligned}
y_\mathrm{G} &= \frac{1}{M}\int_0^{4a} y\rho\,\mathrm{d}V \\
&= \frac{1}{M}\int_0^{4a} y\,\frac{M}{12a^2b}\,6a \times \frac{4a-y}{4a} \times b\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{8a^2}\int_0^{4a}(4ay - y^2)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{8a^2}\left\{\frac{(4a)^3}{2} - \frac{(4a)^3}{3}\right\} \\
&= \frac{4a}{3}
\end{aligned}
$$