

物理学 II

第 1 回 中間テスト

1. xy 平面上で、質点に働く力の成分が $F_x = axy^2$ 、 $F_y = bx^2y$ で表される。質点が原点から点 (a, b) まで、次の 2 種類の経路で移動した場合、それぞれ力はどれだけの仕事をするか。

(1) 直線 $y = \frac{b}{a^2}x$ に沿う経路。

(2) 軸に沿って点 $(0, b)$ まで行き、つぎに軸に平行な直線に沿って点 (a, b) に達する経路。

解答例

(1) 直線 $y = \frac{b}{a^2}x$ は点 (a, b) を通らないため、問題が破綻していました。

ただし、何も考えずに計算だけはできます。

$$\begin{aligned}\int_0^a F_x dx + \int_0^b F_y dy &= \int_0^a axy^2 dx + \int_0^b bx^2y dy \\&= \int_0^a ax \left(\frac{b}{a^2}x\right)^2 dx + \int_0^b b \left(\frac{a^2}{b}y\right)^2 y dy \quad (\because y = \frac{b}{a^2}x) \\&= \frac{b^2}{a^3} \int_0^a x^3 dx + \frac{a^4}{b} \int_0^b y^3 dy \\&= \frac{b^2}{a^3} \times \frac{a^4}{4} + \frac{a^4}{b} \times \frac{b^4}{4} \\&= \frac{ab^2}{4} (1 + a^3b)\end{aligned}$$

(2) 点 $(0, b)$ を経て点 (a, b) に達する経路で移動した場合の仕事は、

$$\int_0^0 F_x dx + \int_0^a F_x dx + \int_0^b F_y dy + \int_b^b F_y dy \quad \text{と表される。}$$

このときの第 1 項と第 4 項は積分範囲がゼロであるため、積分値もゼロになる。

第 2 項は点 $(0, b)$ から点 (a, b) へ移動するときの x 方向の仕事であり、このとき $y = b$ で一定、第 3 項は原点から点 $(0, b)$ へ移動するときの y 方向の仕事であり、このとき $x = 0$ で一定だから、

$$\begin{aligned}&\int_0^0 axy^2 dx + \int_0^a axy^2 dx + \int_0^b bx^2y dy + \int_b^b bx^2y dy \\&= 0 + \int_0^a axb^2 dx + \int_0^b (b \times 0^2 \times y) dy + 0 \\&= ab^2 \int_0^a x dx \\&= \frac{a^3b^2}{2}\end{aligned}$$

物理学 II

第 1 回 中間テスト

2. 密度 ρ 、深さ l の液中に沈んでいる、長さ l 、断面積 S 、質量 m の柱体がある。柱体を鉛直に距離 l だけゆっくりと引き上げるのに要する仕事を求めよ。ただし、液体および空気の抵抗は無視できるものとする。

解答例

柱体には、鉛直下向きに重力、鉛直上向きに浮力が働いている。これを持ち上げるために必要な鉛直上向きの力 F は、

$$F = mg - \rho Vg$$

ただし、 V は柱体の液中にある部分の体積である。柱体を距離 x だけ引き上げたときの V は、

$$V = S(l - x)$$

したがって、柱体を鉛直に距離 l だけゆっくりと引き上げるのに要する仕事は、

$$\begin{aligned}\int_0^l F dx &= \int_0^l \{mg - \rho g S(l - x)\} dx \\ &= \int_0^l mg dx - \int_0^l \rho g S l dx + \int_0^l \rho g S x dx \\ &= mgl - \rho g S l^2 + \frac{1}{2} \rho g S l^2 \\ &= mgl - \frac{1}{2} \rho g S l^2\end{aligned}$$

物理学 II

第 1 回 中間テスト

3. 原点から質点Pまでの距離を r とする。質点には、大きさが $\frac{k}{\sqrt{r}}$ で、常に原点に向かう方向の引力が働いている。位置エネルギーの基準点を原点としたとき、この質点を持つ位置エネルギーを求めよ。

解答例

原点からの距離を x としたとき、距離 r の位置にある質点の原点を基準とする位置エネルギー U は、原点に向かう方向の引力を F とすると、

$$U = \int_r^0 F dx$$

と書ける。

ここで $F = \frac{k}{\sqrt{r}}$ だから、

$$\begin{aligned} U &= - \int_r^0 \frac{k}{\sqrt{r}} dx \\ &= -k \int_r^0 r^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= -k \left[2r^{\frac{1}{2}} \right]_r^0 \\ &= 2k\sqrt{r} \end{aligned}$$

物理学 II

第 1 回 中間テスト

4. 水平面と角 θ をなす滑り台の高さ h のところから質量 m の物体を滑り落とす。下端に到達したときの速さ v を

(1) 摩擦が無視できる場合

(2) 動摩擦係数が μ' の場合

の 2 つの場合について計算せよ。

解答例

(1) この系には外力が働いていないことから、エネルギー保存の法則が成り立つ。すなわち、滑りだす前後の運動エネルギーと位置エネルギーの総和は変化しない。したがって、

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

$$v^2 = 2gh$$

$$v = \sqrt{2gh} \quad (\because v \geq 0)$$

(2) 物体が斜面を滑り落ちるとき、動摩擦力 $\mu'mg \cos \theta$ が働き、物体の滑り落ちる距離は $\frac{h}{\sin \theta}$ であ

る。したがって、摩擦力の行った仕事は、斜面に平行で下向きに x 軸をとり、摩擦力を F とすると、

$$\int_0^{\frac{h}{\sin \theta}} F dx = \mu'mg \cos \theta \times \frac{h}{\sin \theta}$$

$$= \mu'mgh \tan^{-1} \theta$$

滑りだす前後の運動エネルギーと位置エネルギーの総和は、摩擦力のした仕事分だけ変化（熱に変換される）するから、

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + 0 + \mu'mgh \tan^{-1} \theta$$

$$v^2 = 2gh(1 - \mu' \tan^{-1} \theta)$$

$$v = \sqrt{2gh(1 - \mu' \tan^{-1} \theta)}$$

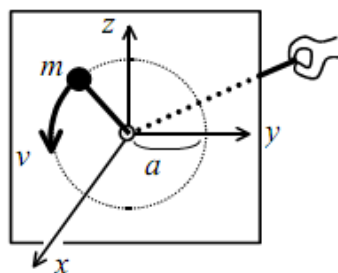
物理学 II

第 1 回 中間テスト

5. 小さい穴の開いた板を yz 面と平行に立てる。質量 m の小球に質量の無視できる糸をつなぎ、その糸を穴に通して手で持つ。摩擦や重力の影響はないものとする。

(1) 図のように、この小球を半径 a 、速さ v で、 yz 面内で回転させる。小球の原点まわりの角運動量ベクトル $\mathbf{L}$ の x, y, z 成分 L_x, L_y, L_z を求めよ。或いは $|\mathbf{L}|$ を求めよ。

(2) 糸をゆっくりと引っ張って、回転する半径を b に変えたときの小球の速さを求めよ。



解答例

(1) yz 面内で回転している小球の位置は、穴の位置を原点として、原点と物体を結ぶ線と y 軸のなす角を θ とすると、物体の位置ベクトル $\mathbf{r}$ は、 $\mathbf{r} = (0, a \cos \theta, a \sin \theta)$ と書ける。

さらに、物体の角速度を ω とすると、 $\theta = \omega t$ となり、物体の速度 $\mathbf{v}$ は、 $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = (0, -a\omega \sin \omega t, a\omega \cos \omega t)$ となる。

角運動量 $\mathbf{L}$ は、 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ だから、

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \\ &= m(0, a \cos \omega t, a \sin \omega t) \times (0, -a\omega \sin \omega t, a\omega \cos \omega t) \end{aligned}$$

$\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)$ だから、

$$\begin{aligned} L_x &= m\{a \cos \omega t \times a\omega \cos \omega t - a \sin \omega t \times (-a\omega \sin \omega t)\} \\ &= m(a^2\omega \cos^2 \omega t + a^2\omega \sin^2 \omega t) = ma^2\omega \\ &= mva \quad (\because v = a\omega) \end{aligned}$$

$$L_y = m\{a \sin \omega t \times 0 - 0 \times a\omega \cos \omega t\} = 0$$

$$L_z = m\{0 \times (-a\omega \sin \omega t) - a \cos \omega t \times 0\} = 0$$

したがって、 $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z) = (mva, 0, 0)$ 、 $|\mathbf{L}| = mva$

($\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ をスカラだけ考えて、 $L = |\mathbf{L}| = r \times p = a \times mv = mva$ としてもよい)

(2) 物体に働く外力は中心力のみであり、位置ベクトルと力の方向が平行であるから角運動量保存の法則が成り立つ。つまり、半径 a で回転している場合の角運動量と、半径 b で回転している場合の角運動量が等しい。半径 b で回転している場合の物体の速さを v' とすると、

したがって、半径 b で回転している場合の物体の速さを v' とすると、

$$mva = mv'b$$

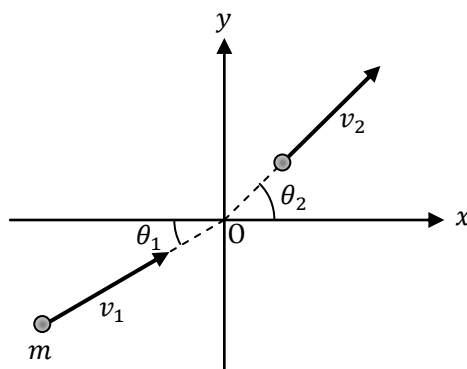
$$\therefore v' = \frac{a}{b}v$$

物理学 II

第 1 回 中間テスト

6. xy 平面内において、 $x < 0$ の部分では位置エネルギー $U = 0$ 、 $x \geq 0$ の部分では $U = U_0$ (一定) となっている。原点の左下方から質量 m の質点が、原点に向かって、速さ v_1 、 x 軸との角 θ_1 で入射し、その後、原点の右上方へ速さ v_2 で x 軸との角 θ_2 の方向へ進行した。

- (1) この質点には y 方向の力は作用しない。 y 方向の運動量保存則の式を書け。
- (2) この質点に対しては、 $x = 0$ の位置で x 軸方向の力が作用するので x 方向の運動量は変化する。しかし、力学的エネルギーは変化しない。 $x < 0$ と $x \geq 0$ の部分における力学的エネルギー保存則の式を書け。
- (3) $\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}$ を求めよ。 v_1 は用いてよい。



解答例

- (1) 速度 $\mathbf{v}_1$ 、 $\mathbf{v}_2$ を x 、 y 成分に分解すると、それぞれ

$$\mathbf{v}_1 = (v_1 \cos \theta_1, v_1 \sin \theta_1)$$

$$\mathbf{v}_2 = (v_2 \cos \theta_2, v_2 \sin \theta_2)$$

と書けるから、 y 方向の運動量は、

$$x < 0 \text{ で、} mv_1 \sin \theta_1$$

$$x \geq 0 \text{ で、} mv_2 \sin \theta_2$$

y 方向の力は作用しないため、 y 方向の運動量保存則は成立する。したがって、

$$mv_1 \sin \theta_1 = mv_2 \sin \theta_2$$

- (2) 力学的エネルギーは運動エネルギーと位置エネルギーの総和であるから、

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_2^2 + U_0 \quad (\text{または、} \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + U_0)$$

- (3) (1) で求めた式より、 $\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_2}{v_1}$

- (2) で求めた式より、 v_2 を導けばよい。

$$v_2^2 = v_1^2 - \frac{2U_0}{m}$$

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{2U_0}{m}} \quad (\because v_2 \geq 0)$$

$$\text{したがって、} \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{v_1} \sqrt{v_1^2 - \frac{2U_0}{m}}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{2U_0}{mv_1^2}}$$