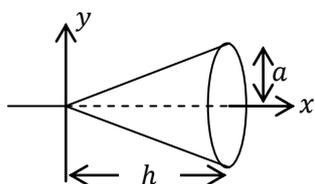


物理学 II
第 4 回 中間テスト

3. 図のような円錐の重心は $x = 3h/4$ の位置にあることを、積分を用いて示せ。



解答例

重心の位置を x_G とすると、 $x_G = \frac{1}{M} \int x \rho dV$ と書ける。ただし、 ρ は円錐の密度、 dV は x と $x + \Delta x$ に挟まれた微小領域の体積を表す。

V を円錐の体積としたとき、 $\rho = \frac{M}{V}$ であるから、 V を計算すれば ρ が求まる。 x 軸に垂直な円の直径が $a \frac{x}{h}$ 、

面積が $\pi \left(a \frac{x}{h}\right)^2$ と書けるから、

$$V = \int_0^h \pi \left(a \frac{x}{h}\right)^2 dx = \pi \left(\frac{a}{h}\right)^2 \int_0^h x^2 dx = \pi \left(\frac{a}{h}\right)^2 \times \frac{h^3}{3} = \frac{\pi a^2 h}{3}$$

$$\rho = \frac{3M}{\pi a^2 h}$$

dV は、 x 軸に垂直な円の面積に厚さ dx を掛けたもの、つまり $dV = \pi \left(a \frac{x}{h}\right)^2 dx$ だから

$$x_G = \frac{1}{M} \int x \frac{3M}{\pi a^2 h} \pi \left(a \frac{x}{h}\right)^2 dx$$

$$= \frac{3}{h^3} \int_0^h x^3 dx$$

$$= \frac{3}{h^3} \times \frac{h^4}{4}$$

$$= \frac{3}{4} h$$