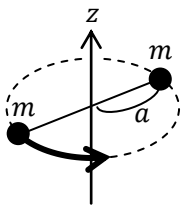
物理学 II
第 4 回　中間テスト

２．質点 m の２つの球を、質点の無視できる長さ $2a$ の棒でつなぐ。この棒を、xy平面内で z軸を中心として、角速度ω で回転させる。



(1)　この２つの球の角運動量ベクトルの和 $\boldsymbol{L}$ の x,y,z成分 L_x, L_y, L_z を求めよ。

(2)　この棒には、外から力を加えることなく、長さを変えられる仕組みがある。棒の長さを $2b$ に変えたときの球の速さ v を求めよ。

解答例

(1)　棒の中点を原点にとり、２つの球がxy平面上を回転しているとすると、２つの球の座標は、

$(a\cos\theta, a\sin\theta, 0)$、$(a\cos(\theta+\pi), a\sin(\theta+\pi), 0)$と書ける。

また、後者$(-a\cos\theta, -a\sin\theta, 0)$と書ける。

ここで、$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}$ であり、$\boldsymbol{v}$は大きさが$a\omega$で方向が$\boldsymbol{r}$から角$\pi/2$だけ回転させたものであるから、

$$\boldsymbol{L} = m(a\cos\theta, a\sin\theta, 0)\times\left(a\omega\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right), a\omega\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right), 0\right) + m(-a\cos\theta, -a\sin\theta, 0)$$

$$\times\left(-a\omega\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right), -a\omega\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right), 0\right)$$

$$= ma^2\omega(\cos\theta, \sin\theta, 0)\times(-\sin\theta, \cos\theta, 0) + ma^2\omega(-a\cos\theta, -a\sin\theta, 0)\times(\sin\theta, -\cos\theta, 0)$$

$$= ma^2\omega(0,0,\cos^2\theta+\sin^2\theta) + ma^2\omega(0,0,\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$

$$= (0,0,2ma^2\omega)$$

よって、$L_x = 0, L_y = 0, L_z = 2ma^2\omega$

(2) 棒の長さを $2b$ に変えたときの球の角速度をω'とすると、

角速度保存の法則より、$2ma^2\omega = 2mb^2\omega'$

ここで、$v = b\,\omega'$だから　$2ma^2\omega = 2mb^2\omega'$を変形すると、

$$a^2\omega = b^2\omega'$$

$$v = b\,\omega' = \frac{a^2\omega}{b}$$