

物理学 II

第 3 回 中間テスト

4. 質量 M 、半径 a の一様な円板のまわりに糸を巻きつける。鉛直下方に x 軸を取り、中心の座標を x 、円板の回転角速度 ω を、糸の張力 T として、以下の問に答えよ。

(1) 円板の中心を通り、円板に垂直な軸まわりの円板の慣性モーメント I を求めよ。このとき、半径 r と $r+dr$ の 2 つの同心円に挟まれた細い帯状円環に分割して計算するとよい。

(2) 重心の運動についての運動方程式を書け。

(3) 重心のまわりの回転についての運動方程式を I を使って書け。

(4) 糸の自由端を動かさずに持ち、円板を降下させるときの中心の加速度を求める。

(a) このとき、糸がほどけただけ重心が落下することから、加速度 $\ddot{x}$ を ω で表せ。

(b) 円板の中心の加速度と、張力 T を求めよ。

解答例

(1) 半径 r と $r+dr$ の 2 つの同心円に挟まれた細い帯状円環に分割し、

$I = \int_0^a r^2 \rho dV$ (ρ : 円板の密度, dV : 帯状円環の体積) を計算する。

円板の厚さを b とすると、

$$I = \int_0^a r^2 \frac{M}{\pi a^2 b} dV = \int_0^a r^2 \frac{M}{\pi a^2 b} 2\pi b r dr \quad (\because \text{半径 } r \text{ の円周} \times b \times dr = dV) = \frac{Ma^2}{2}$$

(2) $M\ddot{x} = Mg - T$

(3) $I\dot{\omega} = aT$

(4) (a) ほどけた糸の長さは、円板が回転した角度に半径を掛けたものに等しいから、その両辺を 2 階微分しても等しい。

したがって、 $\ddot{x} = a\dot{\omega}$

(b) (3)、(1)、(4) (a) の結果を順に用いると、

$$T = \frac{I\dot{\omega}}{a} = \frac{I\ddot{x}}{a^2} = \frac{Ma^2}{2} \times \frac{\ddot{x}}{a^2} = \frac{M\ddot{x}}{2}$$

(2) に代入すると、

$$M\ddot{x} = Mg - \frac{M\ddot{x}}{2} \quad \text{であるから、}$$

$$\text{円板の中心の加速度は、} \ddot{x} = \frac{2}{3}g$$

$$\text{張力は、} T = \frac{M\ddot{x}}{2} = \frac{1}{3}g$$

