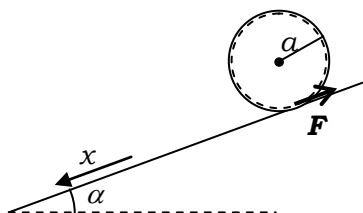


物理学 II

第 3 回 中間テスト

3. 半径 a の薄い球殻 (質量 M) を、水平と角 α をなす粗い斜面上に置いたところ、球殻は滑らずに転がり落ちた。斜面に沿って下方に x 軸をとり、重心の座標を x 、角速度を ω 、斜面に沿って上方に働く摩擦力を F とし、以下の問に答えよ。



- (1) 重心の運動についての運動方程式を書け。
- (2) 球殻の中心を通り、球殻に垂直な軸まわりの慣性モーメントを I_c として、重心のまわりの回転の運動方程式を書け。
- (3) 球殻の加速度 $\ddot{x}$ と角速度 ω の間で成り立つ関係式を書け。
- (4) (1) ~ (3) で得られた式と前問 2 (2) を用いて、球殻の加速度 $\ddot{x}$ を求めよ。
- (5) 摩擦力 F を求めよ。
- (6) 静止摩擦係数を μ とし、斜面に静かに置いた円板が滑らずに転がるための条件を求めよ。

解答例

(1) 球殻の重心にかかる x 軸方向の力は、重力と摩擦力である。重力の x 軸方向の成分は $Mg \sin \alpha$ であるから、

$$M\ddot{x} = Mg \sin \alpha - F$$

(2) $I_c \dot{\omega} = aF$

(3) 球殻が転がった距離は、回転した角度に半径を掛けたものに等しいから、その両辺を 2 階微分しても等しい。したがって、 $\ddot{x} = a\dot{\omega}$

(4) (2)、(3)、2 (2) の結果から、 $F = \frac{I_c \dot{\omega}}{a} = \frac{2}{3} Ma^2 \frac{\dot{\omega}}{a} = \frac{2}{3} M\ddot{x}$ となるから、(1) の結果に代

入すると、 $M\ddot{x} = Mg \sin \alpha - \frac{2}{3} M\ddot{x}$

$$\therefore \ddot{x} = \frac{3}{5} g \sin \alpha$$

(5) $F = \frac{2}{3} M\ddot{x} = \frac{2}{5} Mg \sin \alpha$

(6) 球殻と斜面の接する位置での垂直抗力は、 $Mg \cos \alpha$ だから、

$$\mu Mg \cos \alpha \geq F = \frac{2}{5} Mg \sin \alpha \text{ のときには滑りださない。}$$

$$\text{したがって、} \mu \geq \frac{2}{5} \tan \alpha$$