物理学 II
第３回　中間テスト

２．（１）半径 a の球から、半径 b（$<a$）の球をくり抜いた一様な同心球殻（質量 M）の、直径を軸とする慣性モーメントを求めよ（質量 M、半径 r の一様な直径を軸とする慣性モーメントが$\frac{2}{5}Mr^2$）。
（２）半径 a の薄い球殻（質量 M）の、直径を軸とする慣性モーメントは$\frac{2}{3}Ma^2$であることを示せ。

解答例

（１）半径 a の球の慣性モーメントを I_a、質量を M_a、体積を V_a、半径 b の球の慣性モーメントを I_b、質量を M_b、体積を V_b とすると、$V_a = \frac{4}{3}\pi a^3,\ V_b = \frac{4}{3}\pi b^3$

したがって球殻の密度は、$\frac{M}{V_a + V_b} = \frac{3M}{4\pi(a^3+b^3)}$　であるから、

$$M_a = \frac{3M}{4\pi(a^3+b^3)} \times \frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{Ma^3}{a^3+b^3}\ ,\quad M_b = \frac{Mb^3}{a^3+b^3}$$

球殻の慣性モーメントをIとすると、$I_a = \frac{2}{5}M_a a^2,\ I_a = \frac{2}{5}M_b b^2$ だから、

$$I = I_a - I_b = \frac{2M(a^5 - b^5)}{5(a^3 - b^3)}$$

（２）$a \to b$のときに前問（１）の球殻は、半径 a の薄い球殻となるから、$a \to b$のときのIを計算すれば、薄い球殻の慣性モーメント$I_{a\to b}$が求まる。

$$I_{a\to b} = \lim_{a\to b} \frac{2M(a^5 - b^5)}{5(a^3 - b^3)}$$

殻の厚さ$h = a - b$とおくと、

$$I_{a\to b} = \lim_{h\to 0} \frac{M\{a^5 - (a-h)^5\}}{a^3 - (a-h)^3} = \frac{2}{5}M \times \frac{\lim_{h\to 0} \frac{a^5 - (a-h)^5}{h}}{\lim_{h\to 0} \frac{a^3 - (a-h)^3}{h}}$$

と書ける。ここで、$\lim_{h\to 0} \frac{a^5 - (a-h)^5}{h}$　と　$\lim_{h\to 0} \frac{a^3 - (a-h)^3}{h}$　は、aをhの関数としてそれぞれa^5とa^3の微分を表しているため（微分の定義を参照）、

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^5 - (a-h)^5}{h} = 5a^4,\qquad \lim_{h\to 0} \frac{a^3 - (a-h)^3}{h} = 3a^2$$

したがって、

$$I_{a\to b} = \frac{2}{5}M \times \frac{5a^4}{3a^2} = \frac{2}{3}Ma^2$$