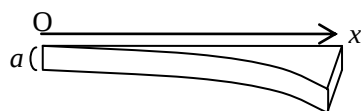


物理学 II

第 3 回 中間テスト

1. 長さ l 、質量 M 、厚さ a のまっすぐな細い棒がある。一様な材料で作られているが、断面積は一端からの距離の 2 乗に比例し、 $\frac{abx^2}{l^2}$ と書ける。この棒の質量中心の位置はどこか。また、質量中心を通る、棒に垂直な軸のまわりの慣性モーメント I_c はいくらか。



解答例

質量中心の位置を x_g 、距離 x における断面積を A とすると、 $x_g = \frac{1}{M} \int x \rho dV = \frac{1}{M} \int x \rho A dx$

また、棒の体積を V とすると、 $\rho = \frac{M}{V}$

ここで、 $V = \int_0^l A dx$ と書けるから、

$$V = \int_0^l \frac{abx^2}{l^2} dx = \frac{1}{3} abl \left(\because A = \frac{abx^2}{l^2} \right)$$

したがって、

$$x_g = \frac{1}{M} \int x \frac{3M}{abl} \frac{abx^2}{l^2} dx = \frac{3}{l^3} \int_0^l x^3 dx = \frac{3}{4} l$$

次に、 $x = 0$ の位置まわりの慣性モーメントを I とすると、 $I = \int x^2 \rho dV = \int x^2 \rho A dx$ 、 $I = I_c + Mx_g^2$ の 2 式より I_c を求める。

$$I = \int x^2 \frac{3M}{abl} \frac{abx^2}{l^2} dx = \frac{3M}{l^3} \int_0^l x^4 dx = \frac{3}{5} Ml^2$$

よって、

$$I_c = I - Mx_g^2 = \frac{3}{5} Ml^2 - \frac{9}{16} Ml^2 = \frac{3}{80} Ml^2$$

質量中心は、 $x = \frac{3}{4} l$ の位置であり、慣性モーメント I_c は $\frac{3}{80} Ml^2$