

物理学 II
第 2 中間テスト

2. 底面の半径が a 、高さ $3h$ の直円錐がある。この上部を軸に垂直に切り取り、高さ $2h$ の直円錐と、高さ h の円錐台の質量中心を求める。
- (1) 切り取った円錐について、質量中心位置の底面からの高さを求めよ。ただし、円錐の体積は (底面の面積 $\times$ 高さ $\div 3$) で求まる。
- (2) 円錐台の質量中心位置について、底面からの高さを計算せよ。

解答例

(1) 円錐の頂点を原点、直円錐の軸を x 軸、原点から底面に向けた方向を正とすると、切り取った円錐の質量中心の x 座標 x_G は、

$$x_G = \frac{1}{M} \int_0^{2h} x \rho \, dV$$

と書ける。

このとき、円錐を x 軸と垂直に、薄い円板に切り分けた微小部分の体積が dV であるから、

$$dV = \left(\frac{a}{3h}x\right)^2 \pi \, dx \quad \left(\text{半径: } \frac{a}{3h}x, \text{ 厚さ: } dx\right)$$

と書ける。

したがって、

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{M} \int_0^{2h} x \rho \left(\frac{a}{3h}x\right)^2 \pi \, dx \\ &= \frac{27}{8\pi a^2 h \rho} \times \frac{\pi \rho a^2}{9} \int_0^{2h} x^3 \, dx \quad \left(\because M = \frac{8}{27}\pi a^2 h\right) \\ &= \frac{3}{8h^3} \times \frac{16h^4}{4} = \frac{3}{2}h \end{aligned}$$

底面から質量中心までの高さは、 $2h - \frac{3h}{2}$ より、 $\frac{h}{2}$

(2) 切り取る前の円錐の質量中心は、(1) の結果から、 x 座標が $\frac{3}{2}h \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}h$ の位置にある。また、質量は $\rho\pi a^2 h$ であるから、円錐台の質量中心の x 座標を X_G とすると、

$$\frac{9}{4}h = \frac{\frac{8}{27}\rho\pi a^2 h \times x_G + \left(\rho\pi a^2 h - \frac{8}{27}\rho\pi a^2 h\right)X_G}{\rho\pi a^2 h} \quad \text{だから} \quad \frac{9}{4}h = \frac{8}{27} \times \frac{3}{2}h + \left(1 - \frac{8}{27}\right)X_G$$

したがって、 $X_G = \frac{195}{76}h$

底面からの高さは、 $3h - \frac{195}{76}h = \frac{33}{76}h$