

物理学 II
第 2 中間テスト

1. xy 平面上の点 $(a, 0)$, 点 $(0, \sqrt{3}a)$, 点 $(0, -\sqrt{3}a)$ に頂点を持つ二等辺三角形がある。この三角形の質量中心の y 座標を求めよ。ただし三角形は密度 ρ で均質であり、厚さを b として計算せよ。

解答例

三角形の質量中心の y 座標を y_G とすると、

$$y_G = \frac{1}{M} \int_{-\sqrt{3}a}^{\sqrt{3}a} y \rho \, dV$$

と書ける。

このとき三角形を x 軸に平行に、細い棒に切り分けた微小部分の体積が dV であり、 $0 \leq y \leq \sqrt{3}a$ のとき、

$$dV = b \times \frac{a}{\sqrt{3}a} (\sqrt{3}a - y) \, dy \quad (\text{厚さ } b \times \text{長さ } \frac{a}{\sqrt{3}a} (\sqrt{3}a - y) \times \text{幅 } dy)$$

$-\sqrt{3}a \leq y < 0$ のとき、

$$dV = b \times \frac{a}{\sqrt{3}a} (\sqrt{3}a + y) \, dy \quad (\text{厚さ } b \times \text{長さ } \frac{a}{\sqrt{3}a} (\sqrt{3}a + y) \times \text{幅 } dy)$$

と書ける。

したがって、

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{1}{M} \left\{ \int_0^{\sqrt{3}a} y \frac{\rho b}{\sqrt{3}} (\sqrt{3}a - y) \, dy + \int_{-\sqrt{3}a}^0 y \frac{\rho b}{\sqrt{3}} (\sqrt{3}a + y) \, dy \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}a^2} \times \frac{\rho b}{\sqrt{3}} \left\{ \int_0^{\sqrt{3}a} y (\sqrt{3}a - y) \, dy + \int_{-\sqrt{3}a}^0 y (\sqrt{3}a + y) \, dy \right\} \quad (\because M = \sqrt{3}a^2 b \rho) \\ &= \frac{\rho b}{3a^2} \left\{ \left[\frac{\sqrt{3}a}{2} y^2 - \frac{y^3}{3} \right]_0^{\sqrt{3}a} + \left[\frac{\sqrt{3}a}{2} y^2 + \frac{y^3}{3} \right]_{-\sqrt{3}a}^0 \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

物理学 II
第 2 中間テスト

1. 《類似問題》

xy 平面上の点 $(a, 0)$, 点 $(-a, 0)$, 点 $(0, \sqrt{3}a)$ に頂点を持つ二等辺三角形がある。この三角形の質量中心の y 座標を求めよ。ただし三角形は密度 ρ で均質であり、厚さを b として計算せよ。

解答例

三角形の質量中心の y 座標を y_G とすると、

$$y_G = \frac{1}{M} \int_0^{\sqrt{3}a} y \rho \, dV$$

と書ける。

このとき三角形を x 軸に平行に、細い棒に切り分けた微小部分の体積が dV であるから、

$$dV = b \times \frac{2a}{\sqrt{3}a} (\sqrt{3}a - y) \, dy \quad (\text{厚さ } b \times \text{長さ } \frac{2a}{\sqrt{3}a} (\sqrt{3}a - y) \times \text{幅 } dy)$$

と書ける。

したがって、

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{1}{M} \int_0^{\sqrt{3}a} y \frac{2\rho b}{\sqrt{3}} (\sqrt{3}a - y) \, dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}a^2 b \rho} \times \frac{2\rho b}{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3}a} y (\sqrt{3}a - y) \, dy \quad (\because M = \sqrt{3}a^2 b \rho) \\ &= \frac{2}{3a^2} \left[\frac{\sqrt{3}a}{2} y^2 - \frac{y^3}{3} \right]_0^{\sqrt{3}a} \\ &= \frac{a}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

物理学 II
第 2 中間テスト

2. 底面の半径が a 、高さ $3h$ の直円錐がある。この上部を軸に垂直に切り取り、高さ $2h$ の直円錐と、高さ h の円錐台の質量中心を求める。

(1) 切り取った円錐について、質量中心位置の底面からの高さを求めよ。ただし、円錐の体積は (底面の面積 $\times$ 高さ $\div 3$) で求まる。

(2) 円錐台の質量中心位置について、底面からの高さを計算せよ。

解答例

(1) 円錐の頂点を原点、直円錐の軸を x 軸、原点から底面に向けた方向を正とすると、切り取った円錐の質量中心の x 座標 x_G は、

$$x_G = \frac{1}{M} \int_0^{2h} x \rho \, dV$$

と書ける。

このとき、円錐を x 軸と垂直に、薄い円板に切り分けた微小部分の体積が dV であるから、

$$dV = \left(\frac{a}{3h}x\right)^2 \pi \, dx \quad \left(\text{半径: } \frac{a}{3h}x, \text{ 厚さ: } dx\right)$$

と書ける。

したがって、

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{M} \int_0^{2h} x \rho \left(\frac{a}{3h}x\right)^2 \pi \, dx \\ &= \frac{27}{8\pi a^2 h \rho} \times \frac{\pi \rho a^2}{9} \int_0^{2h} x^3 \, dx \quad \left(\because M = \frac{8}{27}\pi a^2 h\right) \\ &= \frac{3}{8h^3} \times \frac{16h^4}{4} = \frac{3}{2}h \end{aligned}$$

底面から質量中心までの高さは、 $2h - \frac{3h}{2}$ より、 $\frac{h}{2}$

(2) 切り取る前の円錐の質量中心は、(1) の結果から、 x 座標が $\frac{3}{2}h \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}h$ の位置にある。また、質量は $\rho\pi a^2 h$ であるから、円錐台の質量中心の x 座標を X_G とすると、

$$\frac{9}{4}h = \frac{\frac{8}{27}\rho\pi a^2 h \times x_G + \left(\rho\pi a^2 h - \frac{8}{27}\rho\pi a^2 h\right)X_G}{\rho\pi a^2 h} \quad \text{だから} \quad \frac{9}{4}h = \frac{8}{27} \times \frac{3}{2}h + \left(1 - \frac{8}{27}\right)X_G$$

したがって、 $X_G = \frac{195}{76}h$

底面からの高さは、 $3h - \frac{195}{76}h = \frac{33}{76}h$

物理学 II
第 2 中間テスト

3. なめらかな直径 d の円柱状ガラスコップに、重さ w の一様な細い棒が水平から 30° 傾いて止まっている。このときの棒の長さを求める。
- (1) ガラス壁面から棒が受ける垂直抗力を R_1 、ガラスの縁から棒が受ける抗力を R_2 としたとき、鉛直方向、および水平方向の力のつり合いの式から、 R_1 と R_2 をそれぞれ w で表せ。
- (2) 棒の長さを l として、棒がガラス壁面に接触している点の周りのモーメントの式を書け。
- (3) (1)、(2) の結果より、棒の長さ l を d を用いて示せ。

解答例

(1) 水平方向のつり合い $R_1 = \frac{1}{2} R_2$

鉛直方向のつり合い $w = \frac{\sqrt{3}}{2} R_2$

(2) $R_2 \times \frac{2}{\sqrt{3}} d = \frac{l}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times w$

(3) (2) の式より、 $l = \frac{8}{3} \frac{d R_2}{w}$

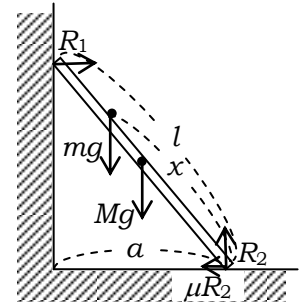
(1) の鉛直方向のつり合いの式を代入、

$$\begin{aligned} l &= \frac{8}{3} \times \frac{d R_2}{\frac{\sqrt{3}}{2} R_2} \\ &= \frac{16}{3\sqrt{3}} d \end{aligned}$$

物理学 II
第 2 中間テスト

4. なめらかな鉛直な壁と表面の粗い床がある。壁から距離 a 離れたところから壁に、長さ l 、質量 M のはしごをかけた。このはしごに質量 m の人が静かに登ったところ、距離 x 登ったところではしごが滑り始めた。はしごと床の間の摩擦係数を μ として、以下の問に答えよ。

- (1) 壁と床との垂直抗力をそれぞれ R_1 、 R_2 とし、水平方向と鉛直方向のつり合いの式を書け。
- (2) はしごの下端まわりのモーメントの式を書け。
- (3) はしごの丁度まん中まで登ったときに、はしごが滑り始めた。 a を 3 m、 l を 5 m とし、 μ の値を求めよ。



解答例

- (1) 水平方向のつり合い $R_1 = \mu R_2$
鉛直方向のつり合い $Mg + mg = R_2$

(2) $Mg \times \frac{a}{2} + mg \times x \frac{a}{l} = R_1 \times \sqrt{l^2 - a^2}$

- (3) (2) で求めた式に数値を代入すると、

$$Mg \times \frac{3}{2} + mg \times \frac{5}{2} \times \frac{3}{5} = R_1 \times \sqrt{5^2 - 3^2} \quad (\because x = \frac{5}{2}) \quad \text{だから}$$

$$Mg + mg = \frac{8}{3} R_1$$

- (1) の鉛直方向のつり合いの式より

$$\frac{8}{3} R_1 = R_2$$

したがって、水平方向のつり合いの式より、

$$\mu = \frac{3}{8}$$



物理学 II

第 2 中間テスト

5. 3本の、長さ l 、重さ w の一様な棒をなめらかな蝶つがいで連結し、両端もなめらかな蝶つがいで $(1 + \sqrt{3})l$ の距離の水平な 2 点 A, B に固定した。A および途中の連結点 C で各棒が受ける力の大きさを求めよ。

解答例

左図のように、A, C, D 各点に掛かる力を考える。

まず棒 AC について、

水平方向のつり合い $F_{Ax} = F_{Cx}$...①

鉛直方向のつり合い $F_{Ay} = w + F_{Cy}$...②

点 A まわりのモーメントのつり合い

$$\frac{\sqrt{3}}{4}lw + \frac{\sqrt{3}}{2}lF_{Cy} = \frac{1}{2}lF_{Cx} \quad \dots③$$

次に棒 CD について、

水平方向のつり合い $F'_{Cx} = F_{Dx}$...④

鉛直方向のつり合い $F'_{Cy} + F_{Dy} = w$...⑤

この系が左右対称であることから、CD は回転せず、

$$F'_{Cy} = F_{Dy} = \frac{w}{2} \quad \dots⑥$$

さらに、点 C で作用反作用の法則が成り立つことから、

$$F_{Cx} = F'_{Cx}, F_{Cy} = F'_{Cy} \quad \dots⑦$$

②、⑥、⑦より、 $F_{Cy} = \frac{w}{2}$ 、 $F_{Ay} = \frac{3}{2}w$

③に代入 $F_{Cx} = \sqrt{3}w$

①より $F_{Ax} = \sqrt{3}w$

A には水平方向に $\sqrt{3}w$ 、鉛直方向に $\frac{3}{2}w$ 、C には水平方向に $\sqrt{3}w$ 、鉛直方向に $\frac{w}{2}$ の力が掛かっている。

