

6. x 軸上を運動している質量の物体の位置エネルギー $U(x)$ が $U(x) = a(x^2 - a)(x^2 - 4a)$ であるとき (は正の定数)

(1) 物質に働く力 F を求めよ。

(2) 物体の運動方程式を書け。

(3) $x = \sqrt{a}$ の位置で物体を静かに放した。この物体はどちらの方向に動き出すか。 x 軸の正方向か負方向か。

(4) 前問 (3) の物体の、その後の速度の最大値はどれだけか。

(5) 前問 (3) の物体の速度がゼロになる位置はどこか。 x 座標の位置を求めよ。

解答例

$$(1) \quad U(x) = a(x^2 - a)(x^2 - 4a) = ax^4 - 5a^2x^2 + 4a^3$$

$$-\frac{\partial U(x)}{\partial x} = F \text{ より、 } F = -4ax^3 + 10a^2x$$

$$= -2ax(2x^2 + 5a)$$

$$(2) \quad F = ma = m\ddot{x} \text{ より、 } m\ddot{x} = -2ax(2x^2 + 5a)$$

$$(3) \quad F(\sqrt{a}) = 6a^2\sqrt{a} > 0$$

正方向に動き出す。

(4) 運動エネルギー保存の法則を考える。

U の最小値を $U_{\min}$ とすると、 $U_{\min}$ の位置では $F = 0$ となるから、

$x = 0, \pm\sqrt{\frac{5}{2}a}$ において $U_{\min}$ の可能性がある。

$$x = 0 \text{ のとき } U(x) = 4a^3, \quad x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}a} \text{ のとき } U(x) = -\frac{9}{4}a^3$$

したがって、前者は極大値、後者が $U_{\min}$ を与えていることが分かる。

位置エネルギー全てが運動エネルギーになるときに速度が最大値をとるから、

$$\frac{1}{2}mv^2 = U(\sqrt{a}) - U_{\min}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{9}{4}a^3$$

$$v = \sqrt{\frac{9a^3}{2m}} \quad (\because v \geq 0)$$

(5) $U(\sqrt{a}) = 0$ だから、再び $U(x) = 0$ になった位置で速度がゼロになる。

$$a(x^2 - a)(x^2 - 4a) = 0$$

$$x = 0, \pm\sqrt{a}, \pm 2\sqrt{a}$$

$x = \sqrt{a}$ より正の方向に動いているから、 $x = 2\sqrt{a}$ の位置で次に速度がゼロになる。