

5. 滑らかな水平台の中央に滑らかなふちを持った小穴がある。糸の一端に質量 m の質点をつけて水平台上におき、糸の他端を穴に通して下に引きながら台上の部分の小穴のまわりに回転させる。台上の糸の長さが r_1 のときの角速度を ω_1 として、以下の問に答えよ。
- (1)、長さが r_2 に縮んだときの角速度を求めよ。
- (2) 糸の長さが r_1 から r_2 に縮む間の、質点の運動エネルギーの変化を求めよ。
- (3) この運動エネルギー変化が何によって生じたか示せ。

解答例

(1) 角運動量保存の法則を用いる。

角運動量は $\vec{r} \times \vec{p}$ 、 $\vec{p} = m\vec{v}$ であるから、糸の長さが r_1 のときの質点の速度 $r_1\omega_1$ を用いると、糸の長さが r_1 のときの角運動量は、 $r_1^2\omega_1$

同様に、糸の長さが r_2 のときの角運動量は、そのときの角速度を ω_2 とすると、 $r_2^2\omega_2$ したがって、 $r_1^2\omega_1 = r_2^2\omega_2$

$$\omega_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2} \omega_1$$

(2) 質点の運動エネルギー変化は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m(r_2\omega_2)^2 - \frac{1}{2}m(r_1\omega_1)^2 &= \frac{1}{2}m\left(r_2\frac{r_1^2}{r_2^2}\omega_1\right)^2 - \frac{1}{2}m(r_1\omega_1)^2 \\ &= \frac{1}{2}m\omega_1^2\left(\frac{r_1^4}{r_2^2} - r_1^2\right) \\ &= \frac{1}{2}m\omega_1^2\frac{r_1^2}{r_2^2}(r_1^2 - r_2^2) \end{aligned}$$

(3) 前問での変化は、 $r_1 > r_2$ より正の値を持つ。つまり運動エネルギーが増加したことを意味する。

糸の張力のする仕事によって質点がこれだけの運動量を獲得している。