

4. 水平との傾きが 30° の雪面上を体重 10 kg のスキーヤーが直滑降するときを考える。初速 10 m/s から距離 $l \text{ m}$ 滑った後の速さが v となった。重力加速度を 10 m/s^2 、雪面とスキーの間の動摩擦係数を $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ 、空気の抵抗は無視するとして $v = 20 \text{ (m/s)}$ となったときの l を求めよ。

解答例

雪面の水平との傾きを θ 、スキーヤーの質量を m 、初速度を v_0 、重力加速度を g 、雪面とスキーの間の動摩擦係数を μ' とすると、初期状態の運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}mv_0^2$$

l 滑った時点での位置を基準に位置エネルギーを考えると、

$$mgl \sin \theta$$

次に l 滑った時点での状態を考える。

運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}mv^2$$

位置エネルギーは 0 。

これに加えて、滑ったときに生じるスキーと雪面間の摩擦（摩擦力 $\mu' mg \cos \theta$ ）による仕事の分だけエネルギーが失われている。この仕事 $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$ を求める。摩擦力を受けながら移動する距離が l であるから、

$$\int_0^l \mu' mg \cos \theta dx = \mu' mgl \cos \theta$$

これらをまとめると、

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgl \sin \theta = \frac{1}{2}mv^2 + \mu' mgl \cos \theta$$

したがって、

$$v_0^2 + 2gl \sin \theta = v^2 + 2\mu' gl \cos \theta$$

数値を代入

$$10^2 + 2 \times 10 \times l \times \frac{1}{2} = 20^2 + 2 \times \frac{1}{2\sqrt{3}} \times 10 \times l \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$100 + 10l = 400 + 5l$$

$$l = 60$$

別解 運動方程式を解いてもよい。