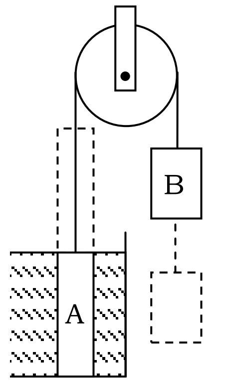
２．密度ρ、深さ l の液中に沈んでいる、長さ l、断面積 S、質量 m の柱体 A にロープをつけ、なめらかな滑車を通して質量の等しいおもり B につなげて静かに離した。液体および空気の抵抗は無視し、以下の問に答えよ。

（１）A を液中から鉛直に距離 l だけゆっくりと引き上げるのに要する仕事を求めよ。

（２）A の底面が液面に出たときの速度 v を求めよ



解答例

（1）$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$を求める。下向きにかかっている力に反して上向きに仕事を行うから、下向きの力を正方向としてxだけ引き上げるとすると、

$F = mg - S(l - x)\rho g$　（重力－浮力）

したがってxを 0 からlまで変化させるときの仕事は、

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^l (mg - S(l - x)\rho g)dx$$

$$= mgl - \frac{1}{2}Sl^2\rho g$$

（2）初期状態において、A、B ともに静止しているため、これを基準とし、エネルギー保存の法則の式を立てる。

A が液面から出た時点の A、B の速度がvであるから、運動エネルギーの和は、mv^2

B は位置エネルギー　$-mgl$だけ失い、A は位置エネルギー　mglだけ獲得する。

しかしながら、A の獲得する位置エネルギーは、A を引き上げるときに必要な仕事に含まれている。

したがって、

$$0 = mv^2 - mgl + mgl - \frac{1}{2}Sl^2\rho g$$

$$mv^2 = \frac{1}{2}Sl^2\rho g$$

$$v = \sqrt{\frac{S\rho g}{2m}}l \;\; (\because \; v \geq 0)$$