

1. xy 平面上で、質点に働く力の成分が $F_x = axy^2$ 、 $F_y = bx^2y$ で表される。質点が原点から点 (a, b) まで、次の 3 種類の経路で移動した場合、それぞれ力はどれだけの仕事をするか。

(1) 直線 $y = \frac{b}{a}x$ に沿う経路。

(2) 放物線 $y = \frac{b}{a^2}x^2$ に沿う経路。

(3) 軸に沿って点 $(a, 0)$ まで行き、つぎに軸に平行な直線に沿って点 (a, b) に達する経路。

解答例

$$(1) \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint F_x \cdot dx + \oint F_y \cdot dy = \int_0^a axy^2 dx + \int_0^b bx^2y dy \quad (\because F_x = axy^2, F_y = bx^2y)$$

$$\text{ここで、} y = \frac{b}{a}x \text{ だから、} \int_0^a axy^2 dx = \int_0^a ax \left(\frac{b}{a}x\right)^2 dx = \frac{b^2}{a} \int_0^a x^3 dx = \frac{a^3b^2}{4}$$

$$\text{また、} x = \frac{a}{b}y \text{ だから、} \int_0^b bx^2y dy = \int_0^b b \left(\frac{a}{b}y\right)^2 y dy = \frac{a^2}{b} \int_0^b y^3 dy = \frac{a^2b^3}{4}$$

$$\text{したがって、} \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{a^3b^2}{4} + \frac{a^2b^3}{4} = \frac{a^2b^2(a+b)}{4}$$

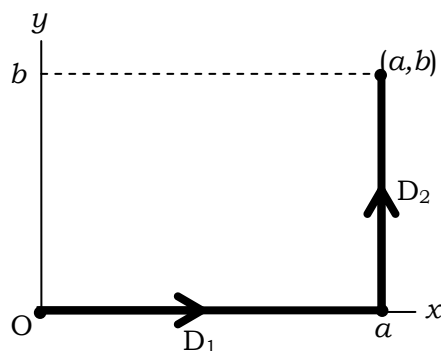
$$(2) \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint F_x \cdot dx + \oint F_y \cdot dy = \int_0^a axy^2 dx + \int_0^b bx^2y dy \quad (\because F_x = axy^2, F_y = bx^2y)$$

$$\text{ここで、} y = \frac{b}{a^2}x^2 \text{ だから、} \int_0^a axy^2 dx = \int_0^a ax \left(\frac{b}{a^2}x^2\right)^2 dx = \frac{b^2}{a^3} \int_0^a x^5 dx = \frac{a^3b^2}{6}$$

$$\text{また、} x^2 = \frac{a^2}{b}y \text{ だから、} \int_0^b bx^2y dy = \int_0^b b \frac{a^2}{b} yy dy = a^2 \int_0^b y^2 dy = \frac{a^2b^3}{3}$$

$$\text{したがって、} \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{a^3b^2}{6} + \frac{a^2b^3}{3} = \frac{a^2b^2(a+2b)}{6}$$

(3)



図のように原点から点 $(a, 0)$ まで移動する経路を D_1 、点 $(a, 0)$ から点 (a, b) まで移動する経路を D_2 とすると、

$$\begin{aligned}
\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{D_1} F_x \cdot dx + \int_{D_1} F_x \cdot dx + \int_{D_1} F_y \cdot dx + \int_{D_1} F_y \cdot dx \\
&= \int_0^a F_x \cdot dx + \int_a^a F_x \cdot dx + \int_0^0 F_y \cdot dx + \int_0^b F_y \cdot dx = \int_0^a F_x \cdot dx + \int_0^b F_y \cdot dx \\
&= \int_0^a axy^2 dx + \int_0^b bx^2 y = 0 + \int_0^b ba^2 y (\because D_1 \curvearrowright y = 0, D_1 \curvearrowright x = a) \\
&= \frac{a^2 b^3}{2}
\end{aligned}$$