

物理学 II

第3回 中間テスト

1. 半径 a 、質量 M の一樣な半球体がある。半球の切り口の面を底面とし、球の中心を原点 O として底面に垂直上向きに x 軸を取ったとき、

- (1) 半球体の重心の位置はどこか。 x 座標を答えよ。
- (2) 半球の慣性モーメントを求めるために、まず、円板の慣性モーメントを求める。質量 m 、半径 r の薄い一樣な円板の慣性モーメントが $\frac{mr^2}{2}$ で表されることを示せ。
- (3) (2) の結果を用いて、半球体の x 軸まわりの慣性モーメントを求めよ。
- (4) x 軸に平行で、底面の円周の一点を通る軸まわりの慣性モーメントを求めよ。

解答例

- (1) 教科書 p89 参照
- (2) 円板の厚さを h とする。中心軸からの距離が x と $x + dx$ に挟まれた微小部分の体積 dV は、

$$dV = 2\pi h x dx$$

と書ける。また円柱の密度は $\frac{m}{\pi r^2 h}$ だから、慣性モーメントは、

$$\int_0^r \left(x^2 \times \frac{m}{\pi r^2 h} \times 2\pi h x \right) dx = \frac{2m}{r^2} \int_0^r x^3 dx = \frac{mr^2}{2}$$

- (3) 半球のうち、 x 座標が x と $x + dx$ に挟まれる部分は厚さ dx 、半径 $\sqrt{a^2 - x^2}$ の円板と考えられる。したがってその体積は、 $\pi(a^2 - x^2)dx$

半球の密度が $\frac{3M}{2\pi a^3}$ だから、この微小部分の慣性モーメントは、

$$\frac{1}{2} \times \pi(a^2 - x^2)dx \times \frac{3M}{2\pi a^3} \times (a^2 - x^2) = \frac{3M}{4a^3} (a^2 - x^2)^2 dx$$

半球の慣性モーメントは微小部分に分割したそれぞれの慣性モーメントの総和であるから、

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{3M}{4a^3} (a^2 - x^2)^2 dx &= \frac{3M}{4a^3} \int_0^a (a^4 - 2a^2 x^2 + x^4) dx \\ &= \frac{3M}{4a^3} \left(a^5 - \frac{2}{3} a^5 + \frac{1}{5} a^5 \right) = \frac{2}{5} Ma^2 \end{aligned}$$

- (4) 求める慣性モーメントを I とすると、

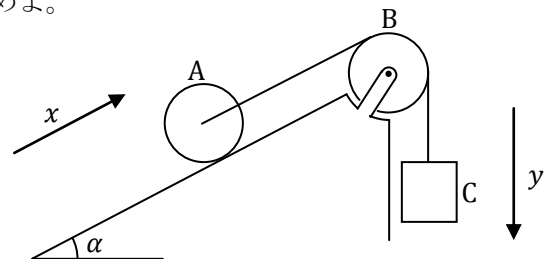
$$I = \frac{2}{5} Ma^2 + Ma^2 = \frac{7}{5} Ma^2$$

物理学 II

第 3 回 中間テスト

2. 水平と角 α をなす斜面上に半径 r 、質量 m の円柱Aがある。この円柱が中心軸まわりに転がれるように軽くて伸びない糸をつけ、斜面の頂上に水平固定軸をつけた半径 r 、質量 m の一様な円板上滑車Bにかけて、糸の他端に質量 m の物体Cをつけ、鉛直に下降させる。球体Aと斜面の間には摩擦力 R が働き、球体Aは斜面を滑らずに転がるとする。また、糸AB間に働く張力の大きさを T_1 、糸BC間に働く張力の大きさを T_2 とし、左下図のように斜面上に平行上向きを x 軸、鉛直下向きを y 軸とする。

- (1) 円柱Aの重心の運動について、 x 軸方向の運動方程式を書け。
- (2) 円柱Aの回転運動について、運動方程式を書け。ただし、円柱Aの回転角を θ とし、円柱の中心軸まわりの慣性モーメントは前問 1. (2) で求めた円板の慣性モーメントと等しいことを用いてよい。
- (3) θ と円柱Aの重心の移動距離 x の関係を求めよ。
- (4) 物体Cの重心の運動について、 y 軸方向の運動方程式を書け。
- (5) 滑車Bの回転角 θ' と θ の関係を求めよ。
- (6) 滑車Bの回転運動について、運動方程式を書け。
- (7) (1) ~ (6) を用いて、球体Aの重心の加速度を求めよ。
- (8) T_1 と T_2 を求めよ。



解答例

- (1) $m\ddot{x} = -mg \sin \alpha + T_1 - R$
- (2) $\frac{mr^2}{2} \ddot{\theta} = rR$
- (3) $x = r\theta$
- (4) $m\ddot{y} = mg - T_2$
- (5) $\theta' = \theta$
- (6) $\frac{mr^2}{2} \ddot{\theta} = r(T_2 - T_1)$
- (7) $\ddot{x} = \ddot{y}$ だから、(4) より $T_2 = mg - m\ddot{x}$
- (2)、(3)、(6) より、

物理学 II
第 3 回 中間テスト

$$R = \frac{1}{2}m\ddot{x}$$

$$T_1 = T_2 - \frac{1}{2}m\ddot{x}$$

よって、(1) に代入すると、

$$m\ddot{x} = -mg \sin \alpha + mg - m\ddot{x} - \frac{1}{2}m\ddot{x} - \frac{1}{2}m\ddot{x}$$

$$3\ddot{x} = -g \sin \alpha + g$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{3}g(1 - \sin \alpha)$$

$$(8) \quad T_2 = mg - m\ddot{x} = mg - \frac{1}{3}mg(1 - \sin \alpha) = \frac{1}{3}mg(2 + \sin \alpha)$$

$$T_1 = T_2 - \frac{1}{2}m\ddot{x} = \frac{1}{3}mg(2 + \sin \alpha) - \frac{1}{6}mg(1 - \sin \alpha) = \frac{1}{2}mg(1 + \sin \alpha)$$