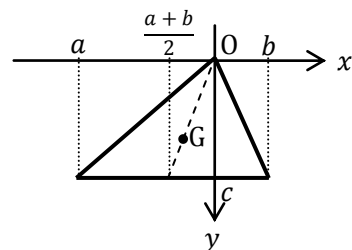


物理学 II

第 2 回 中間テスト

1. 重心は、三角形の頂点からひいた中線上にある。図のような三角形において、重心 G の y 座標が $\frac{2}{3}c$ であることを証明せよ。



解答例

三角形の厚みを d 、質量を M 、密度を ρ 、 y 軸上で座標が y と $y + dy$ に挟まれた部分の体積を dV とすると、重心の y 座標 y_G は、

$$y_G = \frac{1}{M} \int y \rho dV \quad \text{と書ける。}$$

$$M = \frac{1}{2}(b-a)c\rho, \quad dV = \frac{(b-a)y}{c} dy \quad \text{だから、}$$

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{2}{(b-a)c\rho} \int_0^c y \rho \frac{(b-a)y}{c} dy \\ &= \frac{2}{c^2} \int_0^c y^2 dy \\ &= \frac{2}{3}c \end{aligned}$$

物理学 II

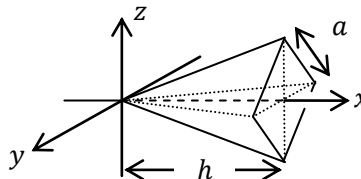
第 2 回 中間テスト

2. 図のような正四角錐について、

(1) $x = r$ ($0 \leq r \leq h$) 面で四角錐を切った断面の面積を求めよ。

(2) (1) の結果を用いて体積を求めよ。

(3) (1)、(2) の結果を用いて重心の x 座標を計算せよ。



解答例

(1) $x = r$ 面で切った断面に現れる正方形の一辺の長さが $\frac{ar}{h}$ だから、

$$\text{断面積は } \left(\frac{ar}{h}\right)^2 = \frac{a^2 r^2}{h^2}$$

(2) (1) の面積を $r = 0$ から h まで積分すれば四角錐の体積が求まるから、

$$\int_0^h \frac{a^2 r^2}{h^2} dr = \frac{a^2}{h^2} \times \frac{h^3}{3} = \frac{a^2 h}{3}$$

(3) 四角錐の質量を M 、密度を ρ 、三角形を x 軸上で座標が x と $x + dx$ に挟まれた部分の体積を dV とすると、重心の x 座標 x_G は、 $x_G = \frac{1}{M} \int x \rho dV$ と書ける。

ここで、 $M = \frac{a^2 h}{3} \rho$ 、 $dV = \frac{a^2 x^2}{h^2} dx$ だから、

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{3}{a^2 h \rho} \int_0^h x \rho \frac{a^2 x^2}{h^2} dx \\ &= \frac{3}{h^3} \int_0^h x^3 dx \\ &= \frac{3}{4} h \end{aligned}$$

物理学 II

第 2 回 中間テスト

3. 重さが10トンの輸送機が滑走路に待機している。後輪間の距離は6 m、前輪から後輪までの垂直距離は10 mであり、重心は機体の中心線上の前輪から9m後方に位置する。

(1) 前輪と 2 つの後輪にそれぞれ何トンずつの重さがかかっているか。

(2) 荷物を積んだら前輪に5.4トン、左右の後輪にそれぞれ7.8トン、4.8トンの重さがかかった。どれだけの荷物をどこに積んだのか。

解答例

(1) 前輪の位置が(0,10)、左右の後輪の位置がそれぞれ(-3,0)と(3,0)になるようにxy軸をとり、前輪、左右の後輪にそれぞれ、 p 、 q 、 r トンずつの重さがかかっているとす。

このとき重心は(0,1)の位置にあるから、

$$0 = \frac{0 \times p + (-3)q + 3r}{p + q + r} \quad \dots (1)$$

$$\text{および、} 1 = \frac{10p + 0 \times q + 0 \times r}{p + q + r} \quad \dots (2)$$

が成り立つ。また、 $p + q + r = 10$ だから、

(2)より、 $p = 1$

これと(1)より、 $q = r = 4.5$

したがって、前輪には1トン、左右の後輪には4.5トンずつかかっている。

(2) 荷物を積んだ機体の重心の x 、 y 座標はそれぞれ、

$$x\text{座標：} \quad \frac{0 \times 5.4 + (-3) \times 7.8 + 3 \times 4.8}{5.4 + 7.8 + 4.8} = -\frac{9}{18}$$

$$y\text{座標：} \quad \frac{10 \times 5.4 + 0 \times 7.8 + 0 \times 4.8}{5.4 + 7.8 + 4.8} = \frac{54}{18}$$

(0,1)の位置に10トンと(x_G, y_G)の位置に8トンがあり、これらを合わせた全体の重心が $\left(-\frac{9}{18}, \frac{54}{18}\right)$ にあるから、

$$x\text{座標：} \quad -\frac{9}{18} = \frac{0 \times 10 + 8x_G}{10 + 8}$$

$$y\text{座標：} \quad \frac{54}{18} = \frac{1 \times 10 + 8y_G}{10 + 8}$$

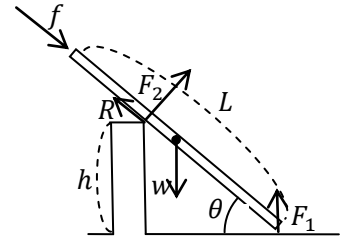
$$\text{よって、} x_G = -\frac{9}{8}, y_G = \frac{11}{2}$$

荷物は、前輪より4.5 m後方で、中心軸から左に $\frac{9}{8}$ mずれた位置にある。

物理学 II

第 2 回 中間テスト

4. 水平でなめらかな床に固定された鉛直で高さ h の衝立に、長さ L 、重さ w の一樣な棒が立てかけてあり、棒と床のなす角は θ である。棒に床と衝立が及ぼす抗力をそれぞれ F_1 、 F_2 、棒と衝立の間の摩擦力を R として、以下の問に答えよ。



- (1) 水平方向と鉛直方向のつり合いの式を書け。
- (2) 棒の下端まわりのモーメントのつり合いの式を書け。
- (3) F_1 、 F_2 、 R を L 、 h 、 w 、 θ で表せ。
- (4) 衝立と棒の間に働く静止摩擦係数を μ としたとき、棒が滑り出さないための μ の条件を θ で表せ。

図のように棒の上端を棒に平行に、右下方向に押した。徐々に力を強くしていったところ、外力が f になったときに棒が滑り始めた。

- (5) このときの R を μ 、 F_2 で表せ
- (6) f を L 、 h 、 w 、 μ 、 θ で表せ。

解答例

$$(1) \text{ 水平 : } R \cos \theta = F_2 \sin \theta \quad \cdots (1)$$

$$\text{鉛直 : } R \sin \theta + F_2 \cos \theta + F_1 = w \quad \cdots (2)$$

$$(2) F_2 \times \frac{h}{\sin \theta} = w \times \frac{L}{2} \cos \theta \quad \text{だから、} \frac{F_2 h}{\sin \theta} = \frac{Lw}{2} \cos \theta \quad \cdots (3)$$

$$(3) (3) \text{ より、} F_2 = \frac{Lw}{2h} \sin \theta \cos \theta$$

$$(1) \text{ に代入すると、} R \cos \theta = \frac{Lw}{2h} \sin^2 \theta \cos \theta \quad \text{だから、} R = \frac{Lw}{2h} \sin^2 \theta$$

$$(2) \text{ に代入、} \frac{Lw}{2h} \sin^3 \theta + \frac{Lw}{2h} \sin \theta \cos^2 \theta + F_1 = w$$

$$\text{よって、} F_1 = w - \frac{Lw}{2h} \sin \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = w - \frac{Lw}{2h} \sin \theta$$

$$(4) \text{ 最大摩擦係数が } \mu F_2 \text{ だから、} \mu F_2 \geq R \text{ でなければならない。}$$

$$\text{したがって、} \mu \geq \frac{R}{F_2} = \frac{\left(\frac{Lw}{2h} \sin^2 \theta\right)}{\left(\frac{Lw}{2h} \sin \theta \cos \theta\right)} = \tan \theta$$

$$(5) R = \mu F_2$$

$$(6) \text{ 外力 } f \text{ が加わっても (3) 式には影響がないため、} F_2 \text{ は変わらない。}$$

また、前問 (5) の結果より R も求まる。

$$\text{水平方向のつりあいが、} R \cos \theta = F_2 \sin \theta + f \cos \theta \quad \text{であるから、}$$

$$f = \frac{1}{\cos \theta} (\mu F_2 \cos \theta - F_2 \sin \theta) = \frac{Lw}{2h} \sin \theta (\mu \cos \theta - \sin \theta)$$