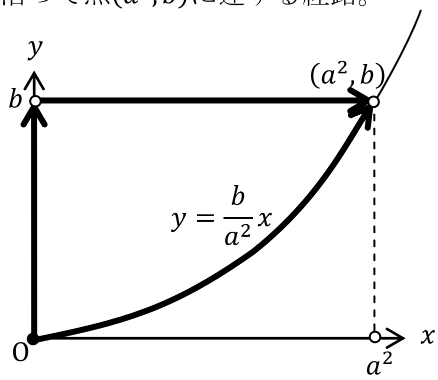
物理学 II

第１回　中間テスト

１．　xy平面上で、質点に働く力の成分が$F_x = axy^2$、$F_y = bx^2y$で表される。質点が原点から点(a^2, b)まで、次の２種類の経路で移動した場合、それぞれ力はどれだけの仕事をするか。

（１）　直線$y = \frac{b}{a^2}x$に沿う経路。

（２）　y軸に沿って点$(0, b)$まで行き、つぎにx軸に平行な直線に沿って点(a^2, b)に達する経路。



<u>解答例</u>

（１）　$\oint \boldsymbol{F} \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^{a^2} F_x \, \mathrm{d}x + \int_0^b F_y \, \mathrm{d}y$

$$= \int_0^{a^2} axy^2 \, \mathrm{d}x + \int_0^b bx^2 y \, \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{a^2} ax\left(\frac{b}{a^2}x\right)^2 \mathrm{d}x + \int_0^b b\left(\frac{a^2}{b}y\right)^2 y \, \mathrm{d}y$$

$$= \frac{b^2}{a^3}\int_0^{a^2} x^3 \, \mathrm{d}x + \frac{a^4}{b}\int_0^b y^3 \, \mathrm{d}y$$

$$= \frac{a^4 b^2}{4}(a + b)$$

（２）　点$(0, b)$を経て点(a^2, b)に達する経路で移動した場合の仕事は、

$$\oint \boldsymbol{F} \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^0 F_x \, \mathrm{d}x + \int_0^{a^2} F_x \, \mathrm{d}x + \int_0^b F_y \, \mathrm{d}y + \int_b^b F_y \, \mathrm{d}y$$

$$= 0 + \int_0^{a^2} axy^2 \, \mathrm{d}x + \int_0^b bx^2 y \, \mathrm{d}y + 0$$

$$= 0 + \int_0^{a^2} axb^2 \, dx + \int_0^b (b \times 0^2 \times y) \, dy + 0$$

$$= \frac{a^5 b^2}{2}$$

物理学 II
第１回　中間テスト

２．　密度ρ、深さlの液中に沈んでいる、長さl、断面積S、質量mの柱体がある。柱体を鉛直に距離$2l$だけゆっくりと引き上げるのに要する仕事を求めよ。ただし、重力加速度をgとし、液体および空気の抵抗は無視できるものとする。

<u>解答例</u>

柱体を引き上げる距離をxとしたとき、

$0 \le x \le l$ の範囲で、柱体には鉛直下向きに重力、鉛直上向きに浮力が働いている。これを持ち上げるために必要な鉛直上向きの力Fは、

$$F = mg - \rho V g$$

ただし、Vは柱体の液中にある部分の体積である。このとき、

$$V = S(l - x)$$

一方、$l < x \le 2l$ の範囲では、

$$F = mg$$

したがって、柱体を鉛直に距離lだけゆっくりと引き上げるのに要する仕事は、

$$\int_0^{2l} F\,dx = \int_0^{l} F\,\mathrm{d}x + \int_l^{2l} F\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{l} \{mg - \rho g S(l - x)\}\,\mathrm{d}x + \int_l^{2l} mg\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{l} mg\,dx - \int_0^{l} \rho g S l\,dx + \int_0^{l} \rho g S\,x dx + \int_l^{2l} mg\,dx$$
$$= 2mgl - \rho g S l^2 + \frac{1}{2}\rho g S l^2$$
$$= 2mgl - \frac{1}{2}\rho g S l^2$$

物理学 II

第１回　中間テスト

３．水平面と角θをなす滑り台の高さhのところから質量mの物体を滑り落とす。下端に到達するまでに摩擦がする仕事を求めよ。ただし、物体と滑り台の間の動摩擦係数をμ'、重力加速度をgとする。

解答例

滑り台上の物体に働く垂直抗力は$mg\cos\theta$だから、動摩擦力は$\mu' mg\cos\theta$

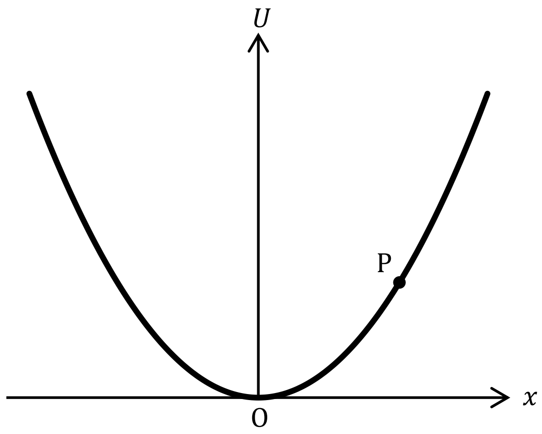
物質が滑り落ちる間に移動する距離が$\frac{h}{\sin\theta}$だから、

摩擦がする仕事は

$$\int_0^{\frac{h}{\sin\theta}} \mu' mg\cos\theta \, dx = \mu' mg\cos\theta \times \frac{h}{\sin\theta}$$
$$= \mu' mgh \tan^{-1}\theta$$

物理学 II
第 1 回　中間テスト

４．x軸上を運動している質量の物体の位置エネルギーUが下図のような状態のとき、物体が点 P の位置においてどのような力を受けるか、方向、大きさについて説明せよ。



解答例

点 P における位置エネルギー関数の傾きに−1 をかけると、物体が点 P の位置において受ける力が求まる。

点 P における傾きが正であるから、物体は負の方向に力を受け、その大きさは傾きの絶対値に比例する。

物理学 II
第１回　中間テスト

５． x軸上を運動している質量の物体の位置エネルギー$U(x)$が$U(x) = a(x^2 + a^2)(x - 2a)$　(a, b は正の定数）であるとき、

（１）物質に働く力がゼロである位置はどこか。x座標の位置で答えよ。

（２）前問の位置におけるUの値はどれだけか。

（３）$x = a/2$の位置で物体を静かに放した。この物体はどちらの方向に動き出すか。x軸の正方向か負方向か理由とともに答えよ。

（４）前問（３）の物体の、その後の速度の最大値はどれだけか。

（５）前問（３）の物体の速度がゼロになる位置はどこか。x座標の位置を求めよ。

解答例

（１）$U(x) = a(x^2 + a^2)(x - 2a) = ax^3 - 2a^2x^2 + a^3x - 2a^4$ だから、物質に働く力をFとすると、

$$F = -\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x} = -3ax^2 + 4a^2x - a^3$$

したがって、$F = 0$ のとき、$-3ax^2 + 4a^2x - a^3 = 0$　だから、

$$a(x - a)(3x - a) = 0$$

$$x = \frac{a}{3} \text{ または } a$$

$x = \frac{a}{3}$ および $x = a$　の２か所でゼロになる

（２）$U\left(\frac{a}{3}\right) = a\left(\frac{a^2}{9} + a^2\right)\left(\frac{a}{3} - 2a\right) = -\frac{50}{27}a^4,$

$U(a) = a(a^2 + a^2)(a - 2a) = -2a^4$

（３）$x = a/2$における F を求めると、

$$F = -\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{3}{4}a^3 + 2a^3 - a^3 = \frac{a^3}{4} > 0$$

したがって、x軸の正方向に動き出す

（４）$x = a/2$ からx軸の正方向に動き出すとき、位置エネルギーが最も小さくなるのは $x = a$ の位置だから、速度の最大値をvとすると力学的エネルギー保存の法則より、

$$0 + U\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2}mv^2 + U(a)$$

物理学 II

第 1 回　中間テスト

$$\frac{1}{2}mv^2 = a\left(\frac{a^2}{4}+a^2\right)\left(\frac{a}{2}-2a\right)+2a^4$$

$$v^2 = \frac{a^4}{4m}$$

$$v = \frac{a^2}{2\sqrt{m}}$$