

物理学 I

補充テスト

1. 質量 M の気球が、ゆっくりした速さ v で下降している。このとき気球は、速さに比例する抵抗力（抵抗係数 k ）を受けるとする。

(1) 空気の密度を ρ とすると、気球の体積はどれだけか。

気球から、質量 m のおもりを落とした。

(2) 気球の位置を地上からの高さ x であらわして、その後の気球の運動方程式を作れ。

(3) 前問(2)の定数項を 0 とした同次微分方程式の一般解を求めよ。

(4) 前問(2)の非同次微分方程式の特解の一つを見つけよ。

(5) 運動方程式の一般解を求めよ。

解答例

(1) 気球が等速運動していることから、気球にかかる力の和はゼロである。

気球にかかる力は、重力、浮力、空気抵抗であるから、気球の体積を V とすると、

$$-Mg + \rho Vg + kv = 0$$

したがって、 $V = \frac{Mg - kv}{\rho g}$

(2) $(M - m)\ddot{x} = -(M - m)g + \rho Vg - k\dot{x}$ だから、前問(1)の式より

$$(M - m)\ddot{x} = -(M - m)g + Mg - kv - k\dot{x}$$

$$(M - m)\ddot{x} = mg - kv - k\dot{x}$$

(3) 前問(2)の定数項を 0 とした同次微分方程式は $(M - m)\ddot{x} = -k\dot{x}$ だから、 $x = e^{\alpha t}$ (α : 定数)と
おくと、特性方程式 $(M - m)\alpha^2 + k\alpha = 0$ が得られる

したがって、 $\alpha = -\frac{k}{M - m}$, or 0

一般解は、 $x = C_1 e^{-\frac{k}{M - m}t} + C_2$ (C_1, C_2 : 定数)

(4) $y = At$ (A は定数)と表される特解が存在すると予想し、 $(M - m)\ddot{x} = mg - kv - k\dot{x}$ に代入、

$A = \frac{mg - kv}{k}$ のときに両辺がゼロになることから、 $y = \frac{mg - kv}{k}t$ は特解の一つである。

(5) 運動方程式の一般解は、

$$x = C_1 e^{-\frac{k}{M - m}t} + C_2 + \frac{mg - kv}{k}t$$

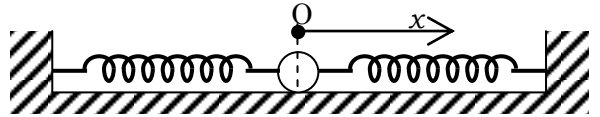
(時刻 $t = 0$ が定義されていないので、初期値も定義されていない。定数はそのまま)

物理学 I

補充テスト

2. 図のように、ばね定数 k の 2 つのばねで壁につながれた質量 m のおもりがある。つりあって静止している状態でのおもりの位置を原点 $0(x = 0)$ とし、右向きに x 軸をとる。

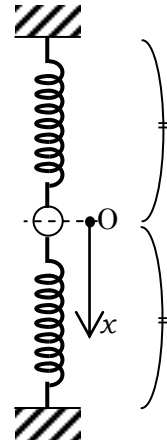
- (1) 左右に単振動させたときの、おもりの運動方程式を書け。
- (2) 運動方程式を解き、単振動の一般解を求めよ。



つぎに、この系をそのまま右に 90° 回転させ、おもりがばねから垂直に吊らされる配置にした。

以下の問に答えよ。

- (3) ばねが x 軸上を上下運動しているときの、おもりの運動方程式を書け。
- (4) $x' = x + A$ として適当な A の値を選ぶと、前問(3)の運動方程式を同次微分方程式型の単振動の運動方程式に書き換えられる。 A の値を求めよ。
- (5) この振動の周期を m, k で表せ。



解答例

(1) $m\ddot{x} = -2kx$

(2) 上式は、 $\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 0$ と書ける。

$x = e^{\alpha t}$ (α は未定定数) とおくと、

$$\alpha = \pm i\sqrt{\frac{2k}{m}}$$

一般解は、

$$x = C_1 e^{i\sqrt{\frac{2k}{m}}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\frac{2k}{m}}t} \quad (C_1, C_2 \text{ は積分定数})$$

$$\therefore x = A \sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \varphi\right) \quad (A, \varphi \text{ は未定定数})$$

(3) $m\ddot{x} = -2kx + mg$

(4) $x = x' - A$ を代入すると、

$$m\ddot{x}' = -2kx' + 2kA + mg$$

$2kA + mg = 0$ のとき、

$m\ddot{x}' = -2kx'$ であるから、

$$A = -\frac{mg}{2k}$$

(5) $2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$