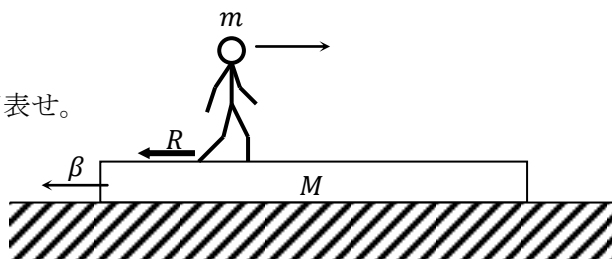


物理学 I
第 3 回 中間テスト

1. 滑らかな水平な氷面上に質量 M の板を置き、その上を質量 m の人が板に対して加速度 α で動くとき、人の進行方向を x 軸にとって、以下の問に答えよ。

- (1) 最初は板を氷面上に固定しておいた。人が進むときに板を蹴る力の大きさを R として、氷面に対する人の運動方程式を書け。
- (2) 次に、板を表面から解放する。氷面に対する板の加速度を $-\beta$ として、氷面に対する人の運動に関する運動方程式を書け。
- (3) 氷面に対する板の運動に関する運動方程式を書け。
- (4) 前問(2),(3)の運動方程式から、 β と R を m, M, α を用いて表せ。



解答例

- (1) 作用反作用の法則により、人は板から力 R を受けるから、

$$m\alpha = R$$

- (2) 人の氷面に対する加速度が $\alpha - \beta$ だから、

$$m(\alpha - \beta) = R$$

- (3) 作用反作用の法則により、板は人から力 $-R$ を受けるから、

$$-M\beta = -R$$

- (4) 前問(2),(3)の式より、

$$\beta = \frac{m}{m+M}\alpha$$

$$R = \frac{mM}{m+M}\alpha$$

物理学 I

第 3 回 中間テスト

2. 質量 m のおもりの運動を考える。初速度 v_0 で落下するおもりについて、 $t = 0$ におけるおもりの位置を原点、鉛直下向きに x 軸を取ったとき、空気抵抗は速度に比例（比例定数 k ）するとして、以下の問に答えよ。

- (1) おもりの運動方程式を書け。
- (2) 前問(1)の定数項を 0 として得られる同次微分方程式の一般解を求めよ。
- (3) 前問(1)の運動方程式の特解を一つ求めよ。
- (4) 初期値を考慮し、運動方程式を解け。

次に、同じおもりが水平との傾き α の斜面上を、初速度 v_0 で滑り落ちる場合を考える。 $t = 0$ におけるおもりの位置を原点、斜面下向きに x 軸を取ったとき、動摩擦係数を μ 、空気抵抗の比例定数を k として、以下の問に答えよ。

- (5) おもりに働く重力の、 x 成分を書け。
- (6) おもりの運動方程式を書け。
- (7) 初期値を考慮し、運動方程式を解け。
- (8) $t \rightarrow \infty$ での質点の速度を求めよ。

解答例

(1) $m\ddot{x} = mg - k\dot{x}$

(2) $m\ddot{x} + k\dot{x} = 0$ を解く。

$x = e^{\alpha t}$ (α : 定数) とおくと、特性方程式 $m\alpha^2 + k\alpha = 0$ が得られる

したがって、 $\alpha = -\frac{k}{m}$, or 0

一般解は、 $x = C_1 e^{-\frac{k}{m}t} + C_2$ (C_1, C_2 : 定数)

(3) $y = At$ (A は定数) と表される特解が存在すると仮定し、 $m\ddot{x} = mg - k\dot{x}$ に代入すると、 $A = \frac{mg}{k}$ のときに両辺がゼロになることが分かる。

したがって、 $y = \frac{mg}{k}t$ は特解の一つである。

(4) (1)で求めた運動方程式の一般解は、前問(2),(3)より、

$$x = C_1 e^{-\frac{k}{m}t} + C_2 + \frac{mg}{k}t$$

物理学 I

第3回 中間テスト

初期値を用いて定数 C_1, C_2 を求める。

$t = 0$ のとき、 $x = 0, \dot{x} = v_0$ であるから、 $x = C_1 e^{-\frac{k}{m}t} + C_2 + \frac{mg}{k}t$ と $\dot{x} = -\frac{k}{m}C_1 e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$ に $t = 0$ を代入すると、

$$\begin{aligned}0 &= C_1 + C_2 \\ v_0 &= -\frac{k}{m}C_1 + \frac{mg}{k}\end{aligned}$$

したがって、 $C_1 = -C_2 = \frac{m}{k}\left(\frac{mg}{k} - v_0\right)$

$$\therefore x = \frac{m}{k}\left(\frac{mg}{k} - v_0\right)\left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1\right) + \frac{mg}{k}t$$

(5) $mg \sin \alpha$

(6) $m\ddot{x} = mg \sin \alpha - k\dot{x} - \mu mg \cos \alpha$

(7) $m\ddot{x} = mg \sin \alpha - k\dot{x} - \mu mg \cos \alpha$ を変形すると、 $m\ddot{x} = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha - k\dot{x}$

$mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha$ は定数であるから、

前問(4)で解いた $m\ddot{x} = mg - k\dot{x}$ の定数項 mg が $mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha$ になっているだけなので、同様に解くと、

$$x = \frac{m}{k}\left(\frac{mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha}{k} - v_0\right)\left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1\right) + \frac{mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha}{k}t$$

(8) 上式より、

$$\dot{x} = -\frac{k}{m} \times \frac{m}{k}\left(\frac{mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha}{k} - v_0\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha}{k}$$

$t \rightarrow \infty$ のとき、 $\frac{k}{m}t \rightarrow \infty$ だから、 $e^{-\frac{k}{m}t} \rightarrow 0$

したがって、 $\dot{x} \rightarrow \frac{mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha}{k}$

物理学 I

第 3 回 中間テスト

3. 質量 m 、底面積 S の柱体をばね定数 k のばねで天井からつるし、柱体の一部を密度 ρ の液体に浸した。つり合いの位置から柱体が上向きに x だけ変位しているとき、柱体の速さが v のときの液体の抵抗力の大きさを rv (r は定数) として以下の間に答えよ。

- (1) 柱体の運動方程式を作れ。
- (2) 前問(1)の運動方程式は、条件により減衰振動、臨界制動、過制動を表す。減衰振動を起こす場合の条件を求めよ。
- (3) 減衰振動する場合の周期を求めよ。

解答例

- (1) つり合いの位置では、浮力と重力が釣り合っているから、重力はすでに浮力と相殺されている。
したがって柱体を上向きに x だけ変位させたときに柱体にかかる重力は無視し、浮力、ばねの復元力、抵抗だけ考えればよい。変位方向が上向きに x であるから、上向き方向が正。

したがって、 $m\ddot{x} = -\rho g S x - kx - r\dot{x}$

- (2) $x = e^{\alpha t}$ (α : 定数)とおくと、特性方程式 $m\alpha^2 = -\rho g S - k - r\alpha$ が得られる。

$$\alpha^2 + \frac{r}{m}\alpha + \frac{\rho g S + k}{m} = 0$$

これを解くと、 $\alpha = -\frac{r}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{\rho g S + k}{m}}$

$\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{\rho g S + k}{m} < 0$ のとき $\sqrt{\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{\rho g S + k}{m}}$ が虚数になるから、 $\sqrt{\frac{\rho g S + k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2} = \omega'$ とおくと、

$$\alpha = -\frac{r}{2m} \pm i\omega'$$

運動方程式の一般解は、

$$x = e^{-\frac{r}{2m}t} (C_1 e^{i\omega' t} + C_2 e^{-i\omega' t}) \quad (C_1, C_2: \text{定数})$$

となり、減衰振動を表す。したがって、減衰振動となる条件は、 $\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{\rho g S + k}{m} < 0$

- (3) 減衰振動の角速度が ω' だから、周期は

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\rho g S + k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}} = \frac{4\pi m}{\sqrt{4\rho m g S + 4mk - r^2}}$$