

物理学 I

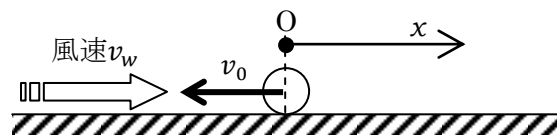
第 2 回 中間テスト

1. 速度 v_w の風が水平に吹き続ける中での、質量 m の球の運動を考える。時刻 $t = 0$ において、球は風上に向かって速度 v_0 で運動していた。風下方向に x 軸、 $t = 0$ における球の位置を原点としたとき、球の運動についての以下の問に答えよ。球が風から受ける空気抵抗は風と質点の速度差に比例（比例定数 k ）しており、質点と水平面間の摩擦は無視できるものとする。

- (1) 任意の時刻 t において球が風から受ける空気抵抗の大きさを v_w と $\dot{x}$ で表せ。
- (2) 質点の運動方程式を書け。

次に、前問(2)の非同次微分運動方程式を解く。

- (3) 定数項を 0 とした同次微分方程式の一般解を求めよ。
- (4) 質点の運動方程式（非同次微分方程式）の特解（特殊解）を一つ求めよ。
- (5) 質点の運動方程式の一般解を、初期値を考慮して求めよ。
- (6) $t \rightarrow \infty$ での質点の速度を求めよ。



解答例

(1) $k(v_w - \dot{x})$

($t = 0$ では、球の速度は $-v_0$ であるから、球を基準とした風速は $v_w - (-v_0) = v_w + v_0$)

(2) $m\ddot{x} = k(v_w - \dot{x})$

(3) 上の式は $m\ddot{x} + k\dot{x} = kv_w$ であるから、 $m\ddot{x} + k\dot{x} = 0$ を解けばよい。

$x = e^{\alpha t}$ (α : 定数)とおくと、特性方程式 $m\alpha^2 + k\alpha = 0$ が得られる

したがって、 $\alpha = -\frac{k}{m}$, or 0

一般解は、 $x = C_1 e^{-\frac{k}{m}t} + C_2$ (C_1, C_2 : 定数)

(4) 特解を $x = at + b$ (a, b は定数)と予想すると、 $a = v_w$ のときに運動方程式が満たされる。

したがって特解は、 $x = v_w t$

(5) 質点の運動方程式の一般解は、 $x = C_1 e^{-\frac{k}{m}t} + C_2 + v_w t$

$t = 0$ のとき $x = 0$ 、 $\dot{x} = -v_0$ だから、

$$C_1 + C_2 = 0$$

$$\dot{x}(t = 0) = -\frac{k}{m}C_1 + v_w = -v_0$$

よって、 $x = \frac{m(v_0 + v_w)}{k} \left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1 \right) + v_w t$

物理学 I
第 2 回 中間テスト

(6) $\dot{x} = -(v_0 + v_w)e^{-\frac{k}{m}t} + v_w$ だから、

$t \rightarrow \infty$ のとき、

$$e^{-\frac{k}{m}t} = \frac{1}{e^{\frac{k}{m}t}} \rightarrow 0$$

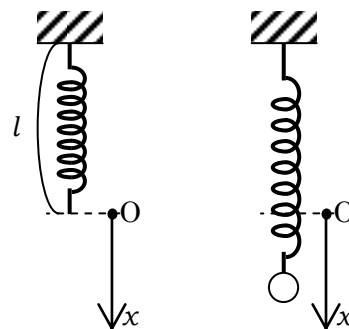
したがって、 $\dot{x} \rightarrow v_w$

物理学 I

第 2 回 中間テスト

2. ばね定数 k 、自然長 l 、質量の無視できるばねの一端を天井に固定し、他端を原点、鉛直下向きに x 軸を取ってばねの運動を考える。以下の問に答えよ。

- (1) ばねの下端に質量 m のおもりを取り付けた。このときの運動方程式を書け。
- (2) $x' = x + A$ (A は定数) とおき、適当な定数 A を与えると、前問(1)の運動方程式は単振動を表す運動方程式となる。 A を求めよ。
- (3) おもりを原点まで持ち上げ、時刻 $t = 0$ に静かにおもりを放した。空気抵抗がないものとして、前問(2)で得られた単振動の式を x' について解け。
- (4) 手を放してからおもりが最初に $x = -A$ を通過するときの時刻 t を求めよ。
- (5) この系を全て水に漬け、同様におもりを原点から放したところ、過制動が起こった。おもりとばねの体積は無視（浮力を無視）し、おもりの速度に比例する水の抵抗の比例定数を r として、過制動の条件を k, m, r で示せ。



解答例

(1) $m\ddot{x} = -kx + mg$

(2) $x' = x + A$ のとき、 $\dot{x}' = \dot{x}$, $\ddot{x}' = \ddot{x}$ だから

運動方程式に $x = x' - A$ を代入すると、 $m\ddot{x}' = -kx' + kA + mg$

したがって、 $A = -\frac{mg}{k}$ としたときに単振動を表す式となる。

つまり、 $x = \frac{mg}{k}$ の位置 ($x' = 0$ の位置) を中心に単振動する

(3) $m\ddot{x}' = -kx'$ を解く。

$x' = e^{\alpha t}$ (α : 定数)とおくと、特性方程式 $m\alpha^2 = -k$ が得られる

したがって、 $\alpha = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$,

一般解は $x' = C_1 e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)$ (C_1, C_2, A, φ : 定数)

(4) $x = -A$ を中心に単振動するから、原点から振動中心までばねの $\frac{1}{4}$ 周期要する。1 周期が $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

だから、 $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$

(5) 運動方程式が $m\ddot{x}' = -kx' + r\dot{x}'$ となるから、

$x' = e^{\beta t}$ (β : 定数)とおくと、特性方程式 $m\beta^2 = -k + r\beta$ が得られる

$\beta^2 - \frac{r}{m}\beta + \frac{k}{m} = 0$ だから、 $\beta = \frac{r}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$

物理学 I

第 2 回 中間テスト

$\sqrt{\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$ が虚数のときに減衰振動、実数のときに過制動となるから、過制動の条件は、

$$\left(\frac{r}{2m}\right)^2 > \frac{k}{m}$$

よって、 $\frac{r}{2m} > \sqrt{\frac{k}{m}}$