物理学 I
第 1 回　中間テスト

１．質量 m の質点を時刻 $t = 0$ に原点から水平に初速度 v_0 で打ち出した。質点を打ち出した水平方向を x 軸方向、鉛直下向きを y 軸方向とし、以下の問いに答えよ。

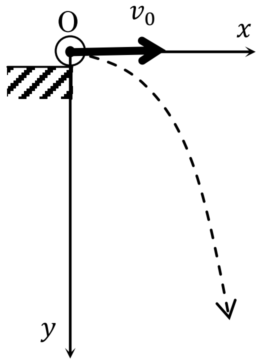
(1)　空気抵抗がない場合の x 軸成分と y 軸成分に分解した運動方程式を求めよ。

(2)　初期条件を用いて上の運動方程式を解け。

(3)　質点に速度に比例した抵抗（比例定数 k）が働く場合について、x 軸成分とy 軸成分に分解した運動方程式を求めよ。

(4)　この場合のx 軸成分の運動方程式を、初期条件を用いて解け。

(5)　y 軸成分の運動方程式についても同様に解け。



<u>解答例</u>

(1)　x 軸成分：$m\ddot{x} = 0$　（x方向に力が掛かっていないため）

　　y 軸成分：$m\ddot{y} = mg$　（y方向に掛かる力は重力のみ）

(2)　x 軸成分：$m\ddot{x} = 0$より$\ddot{x} = 0$

両辺を積分すると、$\dot{x} = C_1$,　$x = C_1 t + C_2$ (C_1, C_2は定数)

$t = 0$ で$\dot{x} = v_0$, $x = 0$より、$C_1 = v_0$, $C_2 = 0$

y 軸成分：$m\ddot{y} = mg$より$\ddot{y} = g$

両辺を積分すると、$\dot{y} = gt + C_3$,　$y = \frac{1}{2}gt^2 + C_3 t + C_4$ (C_3, C_4は定数)

$t = 0$ で$\dot{y} = 0$, $y = 0$より、$C_3 = 0$, $C_4 = 0$

x 軸成分：$x = v_0 t$

y 軸成分：$y = \frac{1}{2}gt^2$

(3)　x 軸成分：$m\ddot{x} = -k\dot{x}$

　　y 軸成分：$m\ddot{y} = mg - k\dot{y}$

(4)　$x = e^{\alpha t}$とおくと、特性方程式 $m\alpha^2 = -k\alpha$ が得られる。

$\alpha = -\frac{k}{m}$ or 0であるから、一般解は$x = C_5 e^{-\frac{k}{m}t} + C_6$ (C_5, C_6は定数)

$t = 0$ で$\dot{x} = v_0$, $x = 0$より、$C_5 = -\frac{mv_0}{k}$, $C_2 = \frac{mv_0}{k}$

$$\therefore\quad x = -\frac{mv_0}{k}e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mv_0}{k}$$

$$= \frac{mv_0}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

物理学Ⅰ
第１回　中間テスト

(5)　まず、$m\ddot{y} = mg - k\dot{y}$ の特解を一つ探す。

$y = \beta t + \gamma$ $(\beta, \gamma$は定数$)$と表される特解が存在すると仮定し、$m\ddot{y} = mg - k\dot{y}$ に代入すると、
$\beta = \frac{mg}{k}$ のときに常に両辺がゼロになることが分かる。
したがって、$y = \frac{mg}{k}t$ は特解の一つである。
前問(4)より、$m\ddot{y} = mg - k\dot{y}$ の同次微分方程式 $m\ddot{y} = -k\dot{y}$ の一般解が

$y = C_7 e^{-\frac{k}{m}t} + C_8$ $(C_7, C_8$は定数$)$であるから、これに特解を足すと $m\ddot{y} = mg - k\dot{y}$ の一般解となる。

よって、

$$y = C_7 e^{-\frac{k}{m}t} + C_8 + \frac{mg}{k}t$$

$t = 0$ で$\dot{y} = 0,\ y = 0$より、$C_7 = \frac{m^2 g}{k^2}, C_8 = -\frac{m^2 g}{k^2}$

$$\therefore\ y = \frac{m^2 g}{k^2} e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{m^2 g}{k^2} + \frac{mg}{k}t$$

$$= \frac{m^2 g}{k^2}\left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1\right) + \frac{mg}{k}t$$

物理学Ｉ
第１回　中間テスト

２．ばね定数 k、質量の無視できるばねの一端を天井に固定し、他端に質量 m のおもりをつける。ばねが振動せずに釣り合っているときのおもりの位置を原点、ばねの伸びる方向を x軸として以下の問に答えよ。

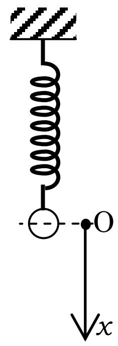
(1)　まず、空気抵抗を無視した場合の運動を考える。おもりを原点から $x = x_0$ までずらし、振動させたときのおもりの運動方程式を書け。

(2)　前問(1)の運動方程式を解き、$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ とおいて x を t の関数で表せ。初期値を考慮して求めること。

(3)　おもりの速度に比例する空気抵抗 $(r\dot{x})$ がある場合の運動を考える。おもりを原点から$x = x_0$ までずらし、振動させたときのおもりの運動方程式を書け。

(4)　前問(3)で、減衰振動が起こる条件をω, k, m で示せ。

(5)　前問(4)の場合の運動方程式を解け。初期値を考慮して求めること。



解答例

(1)　$m\ddot{x} = -kx$

(2)　$x = e^{\alpha t}$とおくと、特性方程式 $m\alpha^2 = -k$ が得られる。

$\alpha = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega$ となるから、一般解は$x = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$ (C_1, C_2は定数)

したがって、$x = A\sin(\omega t + \varphi)$ (A, φ は定数)

$x = x_0$ から振動させ始めるから、$t = 0$ で$\dot{x} = 0, x = x_0$

$A\omega\cos\varphi = 0$ が常に成り立ち、Aとωはゼロでないから$\cos\varphi = 0$

$\varphi = \left(2 \pm \frac{1}{2}\right)\pi$　(nは整数) になり、$\sin\varphi = \pm 1$ より$A = \pm x_0$ (複号同順)

$$\therefore\ x = x_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= x_0 \cos\omega t$$

(3)　$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$

物理学 I
第１回　中間テスト

(4)　$x = e^{\beta t}$とおくと、特性方程式 $m\beta^2 = -k - r\beta$ が得られる。$\rho = \frac{r}{2m}$ とおくと、

$$\beta^2 + 2\rho\beta + \omega^2 = 0$$
$$\beta = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \omega^2}$$

$\rho < \omega$ つまり　$\omega > \frac{r}{2m}$ のときに減衰振動

(5)　$\rho < \omega$のとき、$\sqrt{\rho^2 - \omega^2} = i\sqrt{\omega^2 - \rho^2}$ と書ける。$\sqrt{\omega^2 - \rho^2} = \omega'$ とおくと、

$\beta = -\rho \pm i\omega'$ だから、運動方程式の一般解は、

$$x = C_1 e^{(-\rho + i\omega')t} + C_2 e^{(-\rho - i\omega')t} \ \left(C_1, C_2\text{は定数}\right)$$
$$= e^{-\rho t}\left(C_1 e^{i\omega' t} + C_2 e^{-i\omega' t}\right)$$
$$= e^{-\rho t} B \sin(\omega' t + \gamma) \ (B, \gamma \text{ は定数})$$

$x = x_0$ から振動させ始めるから、$t = 0$ で$\dot{x} = 0, x = x_0$

$B\omega \cos\gamma = 0$ が常に成り立ち、Bとω'はゼロでないから$\cos\gamma = 0$

$\gamma = \left(2 \pm \frac{1}{2}\right)\pi$　(nは整数) になり、$\sin\gamma = \pm 1$ より$B = \pm x_0$（複号同順）

$$\therefore \ x = e^{-\rho t} x_0 \sin\left(\omega' t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= e^{-\frac{r}{2m}t} x_0 \sin\left\{\sqrt{\omega^2 - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}\, t + \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$= e^{-\frac{r}{2m}t} x_0 \cos\left\{\sqrt{\omega^2 - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}\, t\right\}$$