

1.

(1)  $m\ddot{x} = mg - k\dot{x}$

(2) まず、 $\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} = g$  の同次微分方程式

$\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} = 0$  について、一般解を求める。

$x = e^{\alpha t}$  ( $\alpha$ は未定定数) とおくと、

$\alpha^2 + \frac{k}{m}\alpha = 0$ となるから、 $\alpha = 0$  or  $-\frac{k}{m}$

したがって、

$x = C_1 e^{-\frac{k}{m}t} + C_2$  ( $C_1, C_2$ は積分定数)

次に、 $\ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} = g$  の特解を求める。

特解を $y = At + B$  ( $A, B$ は未定定数) とおくと、

$$\frac{k}{m}A = g$$

したがって、 $x = \frac{mg}{k}t$ は特解である。

ゆえに、 $\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} = g$  の一般解は、

$$x = C_1 e^{-\frac{k}{m}t} + C_2 + \frac{mg}{k}t$$

$t = 0$ のとき $x = 0$ 、 $\dot{x} = 0$ だから、

$C_1 + C_2 = 0$ ,  $-\frac{k}{m}C_1 + \frac{mg}{k} = 0$

$\therefore x = \frac{m^2 g}{k^2}(e^{-\frac{k}{m}t} - 1) + \frac{mg}{k}t$

(3)  $m\ddot{x} = mg - k\dot{x}$

(4)  $t = 0$ のとき $x = 0$ 、 $\dot{x} = -v_0$ だから、

$C_1 + C_2 = 0$ ,  $-\frac{k}{m}C_1 + \frac{mg}{k} = -v_0$

$\therefore x = \frac{m}{k}(\frac{mg}{k} + v_0)(e^{-\frac{k}{m}t} - 1) + \frac{mg}{k}t$

(5)  $k > 0$ ,  $m > 0$ であるから、

$t \rightarrow \infty$  のとき、 $e^{-\frac{k}{m}t} \rightarrow 0$

したがって、 $e^{-\frac{k}{m}t} \rightarrow 0$

ここで、 $\dot{x} = -(\frac{mg}{k} + v_0)e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$  だから

ら、

$t \rightarrow \infty$  のとき、 $\dot{x} \rightarrow \frac{mg}{k}$

2.

(1)  $m\ddot{x} = -2kx$

(2) 上式は、 $\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 0$  と書ける。

$x = e^{\alpha t}$  ( $\alpha$ は未定定数) とおくと、

$\alpha = \pm i\sqrt{\frac{2k}{m}}$

一般解は、

$x = C_1 e^{i\sqrt{\frac{2k}{m}}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\frac{2k}{m}}t}$  ( $C_1, C_2$ は積分定数)

$\therefore x = A \sin(\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \varphi)$  ( $A, \varphi$ は未定定数)

(3)  $m\ddot{x} = -2kx + mg$

(4)  $x = x' - A$ を代入すると、

$m\ddot{x}' = -2kx' + 2kA + mg$

$2kA + mg = 0$ のとき、

$m\ddot{x}' = -2kx'$ であるから、

$A = -\frac{mg}{2k}$

(5)  $2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$