1.

(1) x 軸成分：$m\ddot{x} = 0$

y 軸成分：　$m\ddot{y} = mg$

(2) x 軸成分：$t = 0$のとき$\dot{x} = v_0$，$x = 0$だから、$\ddot{x} = 0$の積分より、

$$x = v_0 t$$

y 軸成分：　$\ddot{y} = g$を積分すると、$t = 0$のとき$\dot{y} = 0$，$y = 0$であるから、

$$y = \frac{1}{2} v_0 t^2$$

(3) x 軸成分：$m\ddot{x} = -k\dot{x}$

y 軸成分：　$m\ddot{y} = mg - k\dot{y}$

(4) $m\ddot{x} = -k\dot{x}$だから、$\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} = 0$

$x = e^{\alpha t}$（αは未定定数）とおくと、

$\alpha^2 + \frac{k}{m}\alpha = 0$となるから、$\alpha = 0$ or $-\frac{k}{m}$

したがって、

$x = C_1 e^{-\frac{k}{m}t} + C_2$（$C_2, C_2$は積分定数）

$t = 0$のとき$\dot{x} = v_0$，$x = 0$だから、

$-\frac{k}{m}C_1 = v_0$，$C_1 + C_2 = 0$

$\therefore$　$x = -\frac{mv_0}{k} e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mv_0}{k} = \frac{mv_0}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$

(5) $m\ddot{y} = mg - k\dot{y}$だから、$\ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} = g$

特解を$y = Ae^{\beta t} + Bt + C$（$\beta, A, B, C$は未定定数）とおくと、

$$A\beta^2 e^{\beta t} + \frac{k}{m}A\beta e^{\beta t} + \frac{k}{m}B = g$$

$\beta = -\frac{k}{m}$，$B = \frac{m}{k}g$とおくと上式が成り立つから、$y = e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}t$は特解である。

左辺=0 の同次微分方程式の一般解は、

$x = C_3 e^{-\frac{k}{m}t} + C_4$（$C_3, C_4$は積分定数）

であるから、非同次微分方程式の一般解は、

$$x = C_3 e^{-\frac{k}{m}t} + C_4 + e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}t$$

$t = 0$のとき$\dot{y} = 0$，$y = 0$であるから、

$$-\frac{k}{m}C_3 - \frac{k}{m} + \frac{mg}{k} = 0$$

$$C_3 + C_4 + 1 = 0$$

$\therefore$　$y = \frac{m^2 g}{k^2} e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{m^2 g}{k^2} + \frac{mg}{k}t$

$$= \frac{m^2 g}{k^2}(e^{-\frac{k}{m}t} - 1) + \frac{mg}{k}t$$

2.

(1) $x - A\sin\omega t$

(2) $m\ddot{x} = -k(x - l - A\sin\omega t)$

(3) 上式は、$\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = {\omega_0}^2(l + A\sin\omega t)$
と書けるから

$\alpha^2 + {\omega_0}^2 = 0$

(4) $x = C_1 e^{\omega_0 t} + C_2 e^{-\omega_0 t}$（$C_2, C_2$は積分定数）
だから、

$x = a\sin(\omega_0 t + \varphi)$（$a, \varphi$は未定定数）

(5) 特解を$x = B\sin\omega t + C$（B, Cは未定定数）
とおくと、

非同次微分方程式は、

$$-\omega^2 B\sin\omega t + {\omega_0}^2 B\sin\omega t + {\omega_0}^2 C = {\omega_0}^2(l + A\sin\omega t)$$

$B = \frac{{\omega_0}^2 A}{m({\omega_0}^2 - \omega^2)}$，$C =\ l$とすれば上式が成り立つから、特解は、

$$x = \frac{{\omega_0}^2 A}{m({\omega_0}^2 - \omega^2)}\sin\omega t + l$$

(6) $x = a\sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{{\omega_0}^2 A}{m({\omega_0}^2 - \omega^2)}\sin\omega t + l$

(7) $\omega = \omega_0$　または　$\omega \to \omega_0$

3.

⑴ $ka \leq \mu_0 mg$だから、

$$\frac{\mu_0 mg}{k}$$

⑵ $m\ddot{x} = -kx + \mu mg$

⑶ $x = x^{'} + A$を代入すると、

$$m\ddot{x}' = -kx' + kA + \mu mg$$

$kA + \mu mg = 0$のとき、

$m\ddot{x}' = -kx'$であるから、

$$A = -\frac{\mu mg}{k}$$

⑷ $x = \frac{\mu mg}{k}$を中心とした単振動。

⑸ $t = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

⑹ $m\ddot{x} = -kx - \mu mg$

⑺ $x = -\frac{\mu mg}{k}$を中心とした単振動。