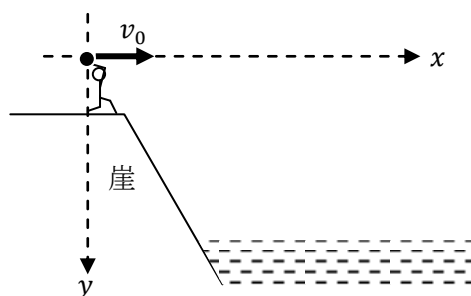


物理学 I

第 2 回 中間テスト

1. 時刻 $t = 0$ に十分高い崖の上から海に向かって初速度 v_0 で水平方向に質量 m の石を投げた。石を投げた地点を原点、海側に向かって水平方向を正の x 軸方向、鉛直下向きを正の y 軸方向とする。また、石には速度に比例した空気抵抗が働き、その比例定数を k ($k > 0$) とする。

- (1) 石の運動の水平成分について、運動方程式を書け。
- (2) 前問(1)の運動方程式について、 $x = e^{\alpha t}$ (α は定数) において特性方程式を解き、一般解を求めよ。
- (3) 初期値を用いて前問(1)の運動方程式の解を求めよ。
- (4) 石の運動の鉛直成分について、運動方程式を書け。
- (5) 前問(4)の運動方程式について、一般解を求めよ。
- (6) 初期値を用いて前問(4)の運動方程式の解を求めよ。



解答例

(1) 水平成分について、石に働く力は空気抵抗のみ

したがって、 $m\ddot{x} = -k\dot{x}$

(2) 運動方程式に $x = e^{\alpha t}$ を代入すると $m\alpha^2 e^{\alpha t} = -k\alpha e^{\alpha t}$ になるから、

$$\alpha = -\frac{k}{m} \text{ または } 0$$

したがって、 $x = e^{-\frac{k}{m}t}$ と $x = 1$ が特解として求められ、一般解は、

$$x = Ae^{-\frac{k}{m}t} + B \quad (A, B: \text{定数})$$

(3) 前問(2)の解を微分すると、速度が時間の関数として求められる。

$$\dot{x} = -\frac{k}{m} Ae^{-\frac{k}{m}t}$$

初期位置が $x = 0$ で、初速度が v_0 だから $t = 0$ を代入すると、

$$x = 0 = A + B$$

$$\dot{x} = v_0 = -\frac{k}{m} A$$

したがって、 $A = -B = -\frac{m}{k} v_0$ となる

$$x = \frac{m}{k} v_0 \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$$

物理学 I

第 2 回 中間テスト

(4) 鉛直成分について、石に働く力は重力と空気抵抗であるから

$$m\ddot{y} = mg - k\dot{y}$$

(5) 上の方程式の特解を $y = Ct$ (C : 定数) と予想し、方程式に代入すると、

$$0 = mg - kC$$

したがって、 $y = \frac{mg}{k}t$ は特解である。

よって一般解は前問(2)の結果と特解より、

$$y = De^{-\frac{k}{m}t} + E + \frac{mg}{k}t \quad (D, E: \text{定数})$$

(6) 前問(5)の解を微分すると、速度が時間の関数として求められる。

$$\dot{y} = -\frac{k}{m}De^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$

初期位置が $y = 0$ で、初速度が 0 だから $t = 0$ を代入すると、

$$y = 0 = D + E$$

$$\dot{y} = 0 = -\frac{k}{m}D + \frac{mg}{k}$$

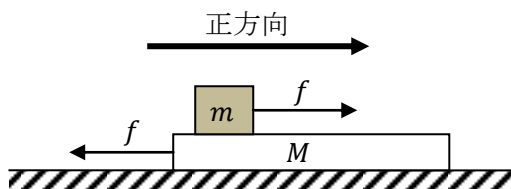
したがって、 $D = -E = \frac{m^2g}{k^2}$ となる

$$y = \frac{m^2g}{k^2} \left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1 \right) + \frac{mg}{k}t$$

物理学 I

第 2 回 中間テスト

2. 図のように、滑らかで水平な床の上に置かれた糸をつけた質量 M の板の上に、糸をつけた質量 m の物体を載せる。物体と板を互いに逆方向に同じ一定の力 f で引っ張ったところ、物体を糸で引く方向を正として、物体は板に対して加速度 α ($\alpha > 0$)、板は床に対して加速度 β ($\beta < 0$)で運動した。床と板の間に働く摩擦力を R とする。



- (1) 物体の床に対する加速度を求めよ。
- (2) 物体の床に対する運動の運動方程式を書け。
- (3) 板の床に対する運動の運動方程式を書け。
- (4) β を M 、 m 、 α を用いて表せ。

解答例

(1) $\alpha + \beta$

(2) 物体には板から負の方向に R だけ摩擦力が働くから、

$$m(\alpha + \beta) = f - R$$

(3) 板には物体から正の方向に R だけ摩擦力が働くから

$$M\beta = R - f$$

(4) 前問(2),(3)の解より、 $m(\alpha + \beta) = -M\beta$

$$\beta = -\frac{m\alpha}{M + m}$$