

物理学 I

第 1 回 中間テスト

1. 図は水平面上を運動する質点を真上から見たものである。この質点の時刻 t での位置 (x 座標と y 座標)は $x = a(t - \sin \omega t)$, $y = a(1 - \cos \omega t)$ (a, t, ω は正の定数)と表わされる。

- (1) 時刻 t での質点の速度 v_x, v_y を a, t, ω を用いて表せ。
- (2) 時刻 t での質点の速さを a, t, ω を用いて表せ。
- (3) 時刻 t での質点の加速度 a_x, a_y を a, t, ω を用いて表せ。
- (4) 質点の質量を m とする時、質点に加わっている力の大きさを a, m, t, ω を用いて表せ。
- (5) 点Pにおいて質点に加わっている力の向きを、図を描いてその中に描き入れよ。

解答例

(1) $v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} a(t - \sin \omega t) = a - a\omega \cos \omega t$, $v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} a(1 - \cos \omega t) = a\omega \sin \omega t$

(2) 速さは $\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ で表されるから、

$$\sqrt{(a - a\omega \cos \omega t)^2 + a^2 \omega^2 \sin^2 \omega t} = a\sqrt{1 - 2\omega \cos \omega t + \omega^2}$$

(3) $a_x = \frac{dv_x}{dt} = a\omega^2 \sin \omega t$, $a_y = \frac{dv_y}{dt} = a\omega^2 \cos \omega t$

(4) 加速度の大きさは、 $\sqrt{(a\omega^2 \sin \omega t)^2 + (a\omega^2 \cos \omega t)^2} = a\omega^2$ であり、
加速度と質量の積が外力の大きさを表すことから、
質点に加わっている力の大きさは、 $ma\omega^2$

(5) 点Pにおいて、 $y = 0$ だから、 $a(1 - \cos \omega t) = 0$

$a \neq 0$ より、 $\cos \omega t = 1$

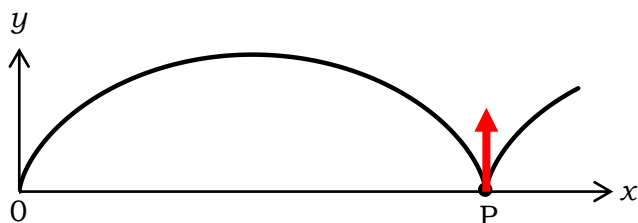
したがって、 $\sin \omega t = 0$ であることが分かる。

よって、 $a_x = 0$, $a_y = a\omega^2$

x 方向へ加わっている力は0、

y 方向へ加わっている力は $ma\omega^2 (> 0)$

ゆえに、点Pでは上向き (y が正の方向) に力が掛かっている。



物理学 I
第 1 回 中間テスト

2つのベクトル $\mathbf{A} = (2, 1, 1)$, $\mathbf{B} = (-2, 2, -4)$ があるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ を求めよ。
- (2) ベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ のなす角を求めよ。
- (3) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ を求めよ。
- (4) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ を $\mathbf{C}$ とするとき、 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} \times \mathbf{C})$ を求めよ。

解答例

(1) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = -4 + 2 - 4 = -6$

(2) ベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ のなす角を θ とすると、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta$

また、 $|\mathbf{A}| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$, $|\mathbf{B}| = \sqrt{4 + 4 + 16} = 2\sqrt{6}$ だから、

$$-6 = \sqrt{6} \times 2\sqrt{6} \times \cos \theta$$

$$\cos \theta = -\frac{1}{2}$$

したがって、 $\theta = 120^\circ$

(3) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (1 \times (-4) - 1 \times 2, 1 \times (-2) - 2 \times (-4), 2 \times 2 - 1 \times (-2)) = (-6, 6, 6)$

(4) $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (0, 3, -3)$ だから、

$$\mathbf{A} \times \mathbf{C} = (2, 1, 1) \times (0, 3, -3) = (1 \times (-3) - 1 \times 3, 1 \times 0 - 2 \times (-3), 2 \times 3 - 1 \times 0) = (-6, 6, 6)$$

よって、 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = (-6, 6, 6) \times (-6, 6, 6) = 0$

物理学 I

第 1 回 中間テスト

3. 質量 M の物体が、一定のゆっくりした速さ v で水中を上昇している。このときの物体は、速さに比例する大きさ kv の抵抗力を受けるとする。水の密度を ρ とし、以下の間に答えよ。

- (1) 物体の体積はどれだけか。
- (2) 体積は変化せず、物体の質量が m だけ増加したとして、物体の水面からの深さを x で表し、物体の運動方程式を作れ。

解答例

- (1) 物体には下向きの重力 Mg 、上向きの浮力 ρVg (V : 物体の体積)、下向きの抵抗力 kv が働いている。

この物質が定速運動をしていることから、加速度は 0 であり、したがって外力が働いていないことが分かる。

よって、 $Mg - \rho Vg + kv = 0$ であるから、

$$V = \frac{Mg + kv}{\rho g}$$

- (2) 物体の水面からの深さを x としていることから、 x は下向きが正方向である。

物体に働く外力は重力、浮力、抵抗力であるから、

$$(M + m)\ddot{x} = (M + m)g - \rho Vg - k\dot{x}$$

(ここで、抵抗力は進行方向の逆方向に働くため、符号は負となる)

前問(1)の結果を代入すると、

$$(M + m)\ddot{x} = Mg + mg - Mg - kv - k\dot{x}$$

よって、

$$(M + m)\ddot{x} = mg - kv - k\dot{x}$$